POZNÁMKY K TEORII DETERMINISTICKÉHO CHAOSU
(Přírodovědné a filosofické souvislosti)

Josef JELEN

Co je to deterministický chaos

Slovo chaos bývá užíváno v řadě ne vždy zcela jasně vymezených významů, jako jsou kupř. zmatek, nepořádek, nepřehlednost, neurčitost, nefunkční složitost, nahodilost ap. Vždy je však zahrnuta nemožnost nalezení řádu a nemožnost předpovídání. Termín deterministický chaos zdánlivě spojuje neslučitelné a vyznívá paradoxně. V přírodovědě má však tento termín zcela přesné vymezení. Krátký příspěvek nemůže ovšem podat příslušnou matematickou teorii; je pouze souborem různorodých poznámek věnovaných některým rysům a souvislostem, z nichž některé mají i významný filosofický dosah.

Výchozím bodem je pojem dynamického systému. Dynamickým systémem budeme v dalším rozumět jakýkoli systém, jehož dynamické chování, tj. vývoj jeho měnícího se stavu v čase, lze modelovat soustavou *n* obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\dot{x}_1 = F_i\,(x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha);\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Stav systému je určen *n*-ticí hodnot $x_1,x_2,\ldots,x_n$ zadaných reálnými čísly. n-rozměrný prostor stavů se souřadnicemi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ se nazývá fázový prostor systému. F_i, $i = 1,2,\ldots,n$ jsou zadané funkce, které vlastně příslušný systém definují. Veličina α zde zastupuje symbolicky všechny případné konstanty, které do rovnic vstupují a mohou, jako tzv. řídící parametry, charakter řešení rovnic ovlivnit. Tečka označuje, jak bývá v přírodovědě zvykem, derivaci podle času *t*. Věcná povaha stavových proměnných $x_1,x_2,\ldots,x_n$ může být velice rozdílná; závisí na systému, který je modelován. Veličinami x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ mohou být kupř. souřadnice, složky rychlostí, úhly, elektrická napětí či proudy v obvodech nebo v záznamu aktivity mozku či srdce ap., mohou jimi být koncentrace chemických složek v reagující směsi, atd.

Splňují-li funkce F_i, $i = 1,2,\ldots,n$ některé, nepříliš omezující, matematické požadavky, je existence a jednoznačnost řešení rovnic $x_i\,(t) = x_i\,(x_1(0), x_2(0),\ldots x_n(0), t)$, $i = 1,2,\ldots,n$ matematicky zaručena. Stav systému, určený hodnotami x_i, jev kterémkoli čase *t* jednoznačně vymezen počátečním stavem systému v čase $t = 0$.

Podobně lze řadu přírodních dějů (kupř. každoroční změny populací určitého hmyzu v ekosystému) modelovat tzv. systémy s diskrétním časem $k = 0,1,2,\ldots$, kdy stav systému v čase $k+1$ je jednoznačně určen stavem systému v čase *k* podle známých funkcí f_i

$$x_i(k+1) = f_i\,(x_1(k), x_2(k),\ldots x_n(k)).$$

I zde je budoucí vývoj systému plně determinován funkcemi f_i a počátečním stavem $x_i(0)$, $i = 1,2,\ldots n$. Pojmy a hlavní výsledky studia systémů se spojitým časem, kde je vývoj dán řešením systému diferenciálních rovnic, lze bez větších obtíží přenést a modifikovat pro tyto diskrétní iterační procesy.

Pro určitost se vraťme zpět k systémům se spojitým časem a pokusme se naznačit, co přesně máme na mysli, hovoříme-li o tom, že systém vykazuje chaotické chování. Ve fázovém prostoru se souřadnicemi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ na jeho osách je počáteční stav v okamžiku $t = 0$ zadán bodem, tj. *n*-ticí čísel $x_i(0)$, $i = 1,2,\ldots n$, který pak určuje celý další časový vývoj a specifikuje stavovou trajektorii (orbitu), která počátečním bodem prochází. Stav v kterémkoli okamžiku je jednoznačně určen bodem, jenž tomuto okamžiku na trajektorii odpovídá. Trajektorie mohou být ve fázovém prostoru uloženy poměrně uspořádaně i velice složitě, zamotaně a propleteně, nemohou se však vzájemně protínat či rozdvojovat. (Obraz lze přirovnat ke složitě zamotaným, avšak nepřerušeným špagetám.) Trajektorie se mohou stahovat k určitým preferovaným místům ve fázovém prostoru, k traktorům v tzv. disipativních systémech.

Složité a matematicky náročné pojmy z teorie dynamických systémů se vzhledem k omezenému rozsahu příspěvku nemůžeme pokoušet přesně definovat. Není to možná ani nutné. Mnozí čtenáři je patrně znají, jiným pak k jejich práci nejsou nezbytně zapotřebí, stačí jim výstižná a korektní představa. Zůstaneme proto na popisné, spíše jen názorné úrovni.

O chaotickém chování dynamického sytému hovoříme tehdy, jestliže vzdálenost dvou stavů (tj. bodů ve fázovém prostoru) s rostoucím časem (lokálně) exponenciálně narůstá. To je možné i tehdy, kdy trajektorie setrvávají v omezené oblasti prostoru, dochází-li však k jejich ohýbání v podobě „skládání“ či „faldování“. Symbolicky (pro jediný rozměr) můžeme rozbíhání vyjádřit vztahem $\Delta_x(t) \approx \Delta_x(0) \cdot e^{\lambda t}$, kde $\lambda > 0$. Chceme-li v takovém systému na základě znalosti počátečního stavu (s konečnou přesností) činit předpověď o stavu v budoucnosti (opět s určitou konečnou přesností), jsme v této možnosti predikce omezeni na $t < \tau$, kde τ udává maximální možnou dobu takovéto předpovědi. Chceme-li prodloužit možnost úspěšné predikce, musíme zpřesnit naši znalost počátečního stavu, avšak nikoli „úměrně“ (nebo podle nějaké mocninné závislosti), ale exponenciálně, tj. mnohem pronikavěji. Kupř. chceme-li prodloužit dobu předpovědi dvakrát, musíme zpřesnit znalost počáteční podmínky čtyřikrát. Lze sugestivně říci, že „běžíme beznadějně za vozem, který nám stále více ujíždí“. Nejsme prostě schopni efektivního předpovídání budoucího stavu systému. Aby se však takováto situace mohla objevit, musí být diferenciální rovnice popisující systém nutné nelineární. Nelinearita je nezbytnou (nikoli však postačující) podmínkou chaotického chování.

Pokusme se v dalším stručně (jen poznámkami a glosami, bez možnosti drobnějšího výkladu) připomenout a komentovat některé obecnější souvislosti.

Obecnější, komentující a „filosofující“ poznámky

— Je chaos dobrý nebo špatný? To není dobře položená otázka. Jak kde Kupř. v předpovědi počasí je jistě nepříliš žádoucí. Rádi bychom předpovídali nikoli na tři až pět dnů, ale třeba na měsíc. To se však spolehlivě nikdy nepodaří. Naopak ovšem, chaos má i výrazné „tvořivé“ rysy a je nezbytnou součástí vzniku a funkcí životných organizmů. V disipativních systémech se mohou jeho vlivem vytvářet synergetické disipativní struktury. Ostatně, i podle většiny mýtů: „Na počátku byl chaos…“

— Celá klasická newtonovská mechanika, popsaná v termínech tzv. zobecněných souřadnic a zobecněných hybností a formulovaná hamiltonovskými kanonickými rovnicemi, spadá plně do třídy dynamických systémů. Každý mechanický systém je i dynamickým systémem. Chaos je možný i ve sluneční soustavě. Počet dimenzí fázového prostoru v Hamiltonově mechanice je nutně vždy sudý.

— Kde všude je deterministický chaos možný, kde se jeho pojmy mohou vyskytnout? Zhruba řečeno: Všude tam, kde má dobrý smysl aplikovat nelineární dynamické modely. Seznam možností je obsažný. Uveďme řadu příkladů, kde byl chaos úspěšně studován: ve fyzice (nelineární mechanika, turbulence, plazma, pevná fáze, supravodivost, lasery, urychlovače částic…), v geofyzice, v meteorologii, astrofyzice, v chemii (kinetika chemických reakcí…), v biologii (dynamika populací, jevy evoluce…) a v medicíně (aktivita mozku, srdce, imunitního systému…), ve strojírenství (nelineární vibrace…), ba i v sociologii (demografické modely…), v ekonomice (modely trhu…) a jinde.

— Je tedy chaos všudypřítomný? Téměř ano, ale „neměli bychom být chaosem osedlí" (Ruelle). Výpočet kteréhokoli modelu nemůže dát víc, než odpovídá jeho věrohodnosti a kvalitě sestavených rovnic. Není-li model dobrý a výstižný, nemůže ani jeho rafinované počítačové zpracování dát mnoho užitku. Zdá se, že období vzrušení, kdy chaos byl trochu i módou, již přechází v klidnou systematickou práci. Literatura čítá stovky a stovky odborných statí.

— Jevy chaosu, vyjádřené dramaticky v „motýlím efektu", který vlastně vyjadřuje citlivost budoucího vývoje na počátečních podmínkách, byly postřehnuty již před téměř stoletím v pracích Poincarého. Dalšímu intenzivnímu studiu byl na překážku fakt, že v té době nebyly k dispozici počítače, které později studium chaotických jevů významně stimulovaly, a také to, že do popředí zájmu fyziků tenkrát vstupovaly překvapivé objevy teorie relativity (teorie prostoročasu) a šokující kvantová fyzika (jako teorie světa atomů a později i subnukleárních částic). Teprve v sedmdesátých a osmdesátých letech našeho století vstoupila teorie chaosu na „ostře osvětlenou scénu" obecného zájmu.

— Překvapivou skutečností je fakt, že deterministický chaos je možný i v systémech velmi jednoduchých, s velmi malým počtem stupňů volnosti, kupř. v případe vynuceného kmitání matematického kyvadla. Třebaže kyvadlo samo má tendenci chovat se periodicky a vnější přiložená síla je rovněž periodická, může výsledný pohyb být neperiodický, velice složitý a chaotický.
Sbíhání a rozbíhání trajektorií ve fázovém prostoru s *n* dimenzemi je matematicky popsáno souborem *n* tzv. Ljapunovových exponentů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, odpovídajících *n* různým nezávislým směrům v takovém prostoru. V systémech se spojitým časem jeden z nich (ten, který odpovídá směru podél trajektorie) je nutně nulový. U tzv. konzervativních systémů se objem ve fázovém prostoru s časem nemění (V = konst.) a tato skutečnost je vyjádřena požadavkem, aby součet exponentů byl nulový, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$. Má-li jeden z nich být kladný (což je podmínkou chaosu), stačí koeficienty tři, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, aby tento požadavek mohl být splněn. U systémů disipativních, v nichž se objem smršťuje a trajektorie jsou přitahovány k příslušnému traktoru, platí $V \to 0$. Součet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ je záporný a opět dostáváme, že $n \geq 3$. Stačí tedy součet se třemi (vhodně nelineárními) rovnicemi, tj. se třemi nezávislými veličinami x_i, i = 1,2,3, určujícími stav systému, aby chaos mohl vzniknout, tj. aby alespoň jeden exponent byl kladný, $\lambda > 0$. U systémů s diskrétním časem stačí dokonce n = 2, ba i n = 1, je-li zobrazení $x(k + 1) = f(x(k))$ neinvertibilní.

— To, že determinismus a praktická předpovídatelnost nejsou totožnými charakteristikami, je zřejmé již na první pohled z hodu mincí, či kostkou, nebo z roztočené rulety. Není třeba zpochybňovat, že příslušné pohyby se řídí deterministickou klasickou mechanickou, a přesto je jejich předpověď efektivně nemožná.

— Zvláště přesvědčivě lze odlišnost determinismu a predikovatelnosti ilustrovat na tzv. Bernoulliově posuvu. Studujme zobrazení zadané diskrétním deterministickým předpisem $x(k + 1) = 2\cdot x(k)$, Mod1, $x(0)\in \langle 0,1\rangle$, k = 0,1,2,…. Předpis požaduje v každém kroku předchozí číslo vynásobit dvěma a v případe, že $2\cdot x(k)$ překračuje hodnotu 1, celou část čísla uříznout a ponechat jen část za desetinou čárkou. (To je smysl zápisu Mod1.) Každé reálné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$ lze ve dvojkovém zápisu vyjádřit jako posloupnost cifer 0 a 1. Násobení dvěma se ve dvojkové soustavě projeví prostě jako posunutí všech cifer o jedno (dvojkové) místo doleva. Jako konkrétní příklad sledujme x(0)=0,01010001101…, x(1)=0,1010001101…, x(2)=0,010001101… (jednička „uříznuta“), x(3)=0,10001101…, x(4)=0,0001101… (jednička „uříznuta“) atd. Je-li x(0) dáno, je zadaným předpisem striktně určeno i každé x(k) v jakémkoli „čase“ k > 0. Každé x(k) zůstává trvale v intervalu $\langle 0,1\rangle$, systém je plně deterministický.
Připusťme, že zadaným předpisem je popsána dynamika jakéhosi přírodního děje a my sledujeme výstupy ze systému postupně v časech k = 0,1,2,…. Nechť však naše experimentální přesnost je omezena a platí $\Delta x = ½$ tak, že nám sledování výstupů $\bar{x}(k)$ umožňuje vždy jen určit, zda přesná hodnota x(k) leží v levé či pravé polovině intervalu $\langle 0,1\rangle$, tj. pro každé *k* můžeme stanovit toliko $\bar{x}(k) = 0$, nebo $\bar{x}(k) = 1$. Sledujme tento děj po dlouhou dobu od k = 0 až po nějaké k = K (kupř. proveďme postupně milion měření). Pokoušíme-li se z nalezených $\bar{x}(0) = 0$, $\bar{x}(1) = 1$, $\bar{x}(2) = 0$, $\bar{x}(3) = 1$, atd. až pro $\bar{x}(K)$ předpovědět výsledek následujícího měření, tedy hodnotu $\bar{x}(K + 1)$, neuspějeme. Všechna dosavadní měření byla vlastně jen postupným „čtením“ cifer 0 a 1 za desetinnou čárkou v počáteční podmínce x(0)=0,01010001101… Neznáme-li počáteční podmínku $\bar{x}(0)$ přesně, tj. jsme-li odkázáni jen na provedená měření v k = 0,1,2,…,K, tj. na $\bar{x}(0)$, $\bar{x}(1)$, $\bar{x}(2)$, $\bar{x}(3)$, až po $\bar{x}(K)$, nemůžeme pro $\bar{x}(K + 1)$ predikovat vůbec nic. Další hodnota 0 nebo 1 se může objevit s pravděpodobností ½ a je zcela náhodná, stejně jako při hodu mincí. Z *K* výsledků nemůžeme předpovědět výsledek $\bar{x}(K + 1)$. Proces se jeví zcela náhodný.
Příklad s Bernoulliovým posuvem se může zdát nerealistický, avšak v podstatě totéž (s příslušnou modifikací) se může přihodit i u chaotických systémů popsaných diferenciálními rovnicemi a s měřeními prováděnými s libovolnou (avšak nutně konečnou) přesností.

— Z předchozího příkladu je patrné, že chaotický dynamický systém se může jevit na „makroskopické úrovni“ jako svérázný zdroj informace. V Bernoulliově posuvu „vytéká“ v každém kroku jedna cifra 0 nebo 1, tedy množství informace velikosti jednoho bitu. Posuvem cifer (při násobení dvěma) se informace ze vzdálených dvojkových míst (z „mikroskopické úrovně“ daleko vpravo) přelévá postupně až na první místo za desetinnou čárkou, tj. na (v tomto případe) relevantní „makroskopickou“ úroveň. Příslušnou charakteristikou kvantifikující rychlost tohoto vytékání informace je tzv. Kolmogorovova entropie dynamického systému. (Ta by však neměla být zaměňována za obvyklý pojem entropie zaváděný v termodynamice a ve statistické fyzice.) Alternativně lze tuto K-entropii stejně dobře interpretovat i jako míru rychlosti, se kterou systém „zapomíná“ své počáteční podmínky.

— Za pozornost stojí, že cesty k chaosu vykazují jistou univerzálnost, a to i u systémů věcně zcela odlišných. Záleží především na nelinearitách v příslušném matematickém popisu. Dynamické chování systému významně závisí na tzv. řídících parametrech, kupř. na koeficientech v příslušném systému rovnic. Nejznámějším z několika málo univerzálních „scénářů“ nástupu chaotického chování při postupné změně řídícího parametru je tzv. proces bifurkací řešení, v nichž dochází náhle ke změně periodického chování systému. Při přechodu určité kritické hodnoty řídícího parametru dochází skokem k bifurkaci a další, opět periodické řešení vykazuje již dvojnásobnou periodu. Po kaskádě takovýchto bifurkací, provázených vždy zdvojením předchozí periody, dojde posléze při určité limitní hodnotě řídícího parametru k nastolení neperiodického, nepredikovatelného, chaotického režimu chování. Tento univerzální scénář, nalezený koncem sedmdesátých let Feigenbauem, ve své době pronikavě podnítil zájem o hlubší studium univerzality chaotických jevů.

— Chaos i řád zpravidla existují v těsném sousedství. Mnohdy stačí malá změna hodnoty řídícího parametru, aby chaotický režim přešel v periodický a naopak. Příkladem jsou tzv. Šaškovského periody v oblasti plného chaosu systému, u kterého po kaskádě zdvojování period již nastoupil plně chaotický režim chování. Tzv. bifurkační diagramy pro systémy se dvěma či více proměnlivými řídícími parametry bývají vyplněny těsně sousedícími oblastmi s rozmanitým periodickým i chaotickým chováním.

— U disipativních systémů existují v jejich fázovém prostoru určité podmnožiny, k nimž se časem stahují trajektorie z celé určité širší oblasti přitažlivosti počátečních stavů. Takovými traktory, s nulovým n-rozměrným objemem, mohou být obvykle body (tzv. uzly či ohniska), uzavřené křivky (tzv.limitní cykly) nebo tory (vícerozměrné anuloidy). S překvapením bylo však nalezeno, že takovými atraktory mohou být i množiny velice zvláštní a podivné.Odtud název podivné (chaotické)traktory.
Aby pohyb disipativního systému na atraktoru neustal, ale trvale probíhal, musí takový systém být otevřeným systémem, a z fyzikálního hlediska posuzováno, musí jím trvale protékat (a být disipována) energie. Chaotickým traktorům lze přisoudit celou řadu metrických dimenzí, které mají neceločíselné hodnoty. Tyto atraktory mají fraktální povahu.
Někteří autoři od nich očekávají, že pomohou pochopit mechanizmy vytváření uspořádaných disipativních struktur, adaptivního chování a učení se a přispějí tak k lepšímu pochopení projevů živých organizmů.

— Nejznámějším příkladem fraktální množiny je tzv. Kantorův prach. Stojí patrně za to, pokusit se jí trochu přiblížit. Vznikne kupř. následujícím limitním postupem. Z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na reálné ose vyjměme prostřední třetinu a ponechme jen obě krajní části (včetně koncových bodů). V dalším kroku z obou krajních třetin vyjměme opět stření část a ponechme jen krajní třetiny. V takovéto proceduře vyjímání střeních částí pokračujme „až do nekonečna“. Body, které z původního intervalu $\langle 0,1 \rangle$ zbudou po „dokončení limitního procesu“, patří do konstruované Cantorovy množiny. Jak velká je tato množina? Lze snadno ukázat, že její objem je nulový (tj. její míra je nulová), nikde v ní neleží ani sebemenší celý interval. Její body lze však vyjádřit jako všechna čísla, která v trojkové soustavě jsou vyjádřena libovolnými nekonečnými posloupnostmi cifer 0 a 2. Těchto posloupností je ale nespočetně nekonečně mnoho a mohutnost této množiny je tak stejná jako mohutnost všech reálných čísel v původním intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Tato množina má mohutnost kontinua. Strukturu Cantorovy množiny lze charakterizovat neceločíselnou Hausdorffou dimenzí D=0,6309…

I když tato množina sama není traktorem žádného fyzikálně významného dynamického systému, řada atraktorů zajímavých dynamických systémů má ve svém „příčném směru“ strukturu příbuznou. V těsném sousedství leží nekonečně mnoho sobě nekonečné blízkých listů.

— Potřeba použití statistických a pravděpodobnostních pojmů a metod ve statistické fyzice bývala tradičně připisována skutečnosti, že ve studovaném systému (zpravidla plynu či látce o určitém objemu) máme co dělat s nezvládnutelně obrovským počtem mikroskopických částic. Ukazuje se však, že chaotické chování je možné i u systémů s malým počtem stupňů volnosti, pokud je dynamika systému dlouhodobě nepredikovatelná. Vedle počtu částic tedy hraje roli i chaotická dynamika. S chaotickou dynamikou tak souvisí i ireverzibilita přírodního dění.

— Chaotické chování systému je obvykle demonstrováno využitím počítačů. Ne vždy si však demonstrující uvědomí jistou ošidnost a úskalí této cesty. Každý počítač je totiž konečným systémem s konečně mnoha možnými stavy, pracuje jen s racionálními čísly a zaokrouhluje v racionálních číslech. V důsledku toho žádná „vypočítaná trajektorie“ nemůže být opravdu chaotickou, je nutné periodická, byť s periodou velmi dlouhou. Naštěstí existuje rigorózní matematický důkaz tzv. „stínového lemmatu“. To říká, že v libovolně blízkém ε-ovém okolí vypočtené „trajektorie“, která však v důsledku zaokrouhlování vlastně ani není skutečnou trajektorií studovaného chaotického systému, leží opravdová chaotická trajektorie tohoto systému, která se však neodvíjí z původně dosazené počáteční podmínky x(0), ale z nějaké jiné, blízké hodnoty, Chaos je tedy zachráněn.

— Někdy se o deterministickém chaosu hovoří jako o „novém paradigmatu vědy“. Myslím, že je to označení trochu nadsazené, odpovídající vzrušujícím očekáváním v nástupu zájmu o rigorózní teorii chaosu. Již jsme připomněli poznámku jednoho z autorů termínu podivný atraktor, že teorie deterministického chaosu je významným příspěvkem, ba i mezníkem na cestě hledání nového, poučenějšího paradigmatu, než jak by odpovídalo laplaceovské optimistické (či pesimistické?) mechanistické představě, že vše můžeme spočítat.

— Nepochybně závažnou korekturou nadsazených očekávání je již dávno známá existence kvantových jevů. V mikrosvětě, kde klasické určení stavu omezují Heisenbergovy relace neurčitosti ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$), ztrácí dobrý smysl sám pojem fázového prostoru, v němž je součastně ostré určení polohy a hybnosti klíčovým požadavkem. Už tedy samo stanovení počáteční podmínky s nekonečnou přesností je jen limitní představa klasického modelu. Ostatně Schrödingerova rovnice je rovnicí lineární (platí princip superpozice) a klasicky chápaný kvantový chaos není vlastně možný. Rozvíjí se však náročné zkoumání tzv. kvantové chaologie, zabývající se oblastmi na rozhraní „zájmů“ klasického a kvantového popisu a analýzou kvantového chování se klasicky chaotických systémů.

— Za filosoficky nejzajímavější a nejvýznamnější přínos teorie deterministického chaosu lze, myslím, označit skutečnost, že řada pojmů, které svým zavedením mají především logickou a matematickou povahu, zde vstupuje do konkrétních přírodovědeckých souvislostí a aplikací. Jsou to kupř. dvojice pojmů konečné a nekonečné, spočetné a nespočetné, počítatelné a nepočítatelné, dokazatelné a nedokazatelné ap.

— Zdánlivý konflikt obou určení v názvu deterministického chaosu spočívá v tom, že determinismus je zde podán v termínech matematické analýzy funkcí reálných čísel. Stanovení počáteční podmínky $x_i(0)$; i = 1,2,…,n, je dáno bodem ve fázovém prostoru. Je nekonečně přesné, zatímco každé skutečně provedené měření je vždy možné jen s přesností konečnou. Odtud pak vyplývá, že trvalé předpovídání budoucích stavů systému není u chaoticky se chovajícího systému možné.
Reálné číslo je z lidského pohledu objekt velice problematický. V jeho matematické definici (kupř. jako limity vhodné posloupnosti racionálních čísel) je obsažen nekonečný proces. Reálné číslo může být (ve svém desetinném rozvoji) vyjádřeno jako nekonečná posloupnost (dekadických) cifer. Obsahuje tak vlastně nekonečné množství informace. Nemůže být proto měřeno ani počítáno, ba vlastně ani opravdu uspokojivě definováno. Přesto s ním matematika pracuje a v přírodních vědách je úspěšně používáno.

— V souvislosti s deterministickým chaosem, s otázkami složitosti a v problematice obecné teorie počítání je velice plodným pojmem tzv. algoritmická nahodilost. Ze dvou posloupností P_1 a P_2 vyhlížejících třeba následovně
P_1 : 10010111010100001011, P_2 : 10101010101010101010, za náhodnou rozhodně spíše označíme P_1 nežli P_2, ačkoli obě mohou stejně dobře být výsledkem dvaceti hodů mincí. Za algoritmický informační obsah takové dostatečně dlouhé posloupnosti označíme délku minimálního počítačového programu (opět vyjádřeného nulami a jedničkami), který danou posloupnost může vypočítat a vytisknout. Posloupnost, která má zřetelný řád svého vytváření, může být „zkrácena“. Posloupnost, která zkrácena být nemůže, je „náhodná“, nemá řád, nenabízí kratší pravidlo svého vytvoření. Diskrétní čtení chaotické trajektorie je v tomto pojetí náhodné. (Viz kupř. ilustraci Bernoulliova posuvu.) Pojmy náhodnosti a informačního algoritmického obsahu lze přiměřeně rozšířit i na posloupnosti nekonečné.

— Lze ukázat, že téměř všechny posloupnosti jsou náhodné (není dostatek kratších programů). Také skoro všechna reálna čísla jsou v tomto smyslu „náhodná“. Překvapivě působí jistě fakt, že lze dokázat, že neexistuje způsob, jak obecně náhodnost libovolného čísla dokázat. Tyto otázky jsou úzce spjaty s Gödelovými výsledky z matematické logiky. Gödel ukázal (1931), že žádný formální logický systém s axiomy, dostatečně bohatý na to, aby v něm bylo možno formulovat aritmetiku přirozených čísel (a tento požadavek není nijak přemrštěně náročný), nemůže být úplný. Lze v něm totiž formulovat věty, které jsou pravdivé, ale v rámci jeho možností nedokazatelné. Lidské poznávání se zřejmě neredukuje toliko na možnosti přísně logických formálně založených systémů. S neúplností formálních systémů v matematické logice jsou úzce spjaty některé problémy mechanické počítatelnosti a užití algoritmů v obecné teorii počítání (Turing). Ani matematika není a nemůže nikdy být prosta nahodilostí a nejistot (Chitin).
Přitažlivost a zásadní povaha těchto otázek vede některé autory (Pentose, Ruelle) až ke spekulacím, že právě tyto problémy mají blízko k problematice přírodovědné stránky povahy lidského vědomí.
Jednou z cestiček vedoucích od zmíněných abstraktních logických otázek až ke zcela konkrétním přírodovědeckým problémům je i teorie deterministického chaosu, která byla tématem tohoto článku. Jistě by si samy o sobě zasloužily obsáhlejší výklad a pokus o rozbor v samostatném příspěvku při jiné příležitosti.

Literatura

Schuster, H. G., *Deterministi Chaos,* Weinheim 1984
Gleick, J., *Chaos. Vznik nové vědy,* Ando Pub., 1996
Jelen, J., O chaosu a řádu v přírodě (Teorie deterministického chaosu a hledání nového paradigmatu vědy.), *Realismus ve vědě a filosofii,* ed. Nosek J., Stachová J., Filosofia, 1995, s. 152-167