Determinismus a chaos

1 Vytváření teorií

Moderní přírodověda představuje programové, systematické a cílené nalézání souvislostí mezi přírodními jevy. Formuluje vhodné pojmy a veličiny, a pokud možno co nejpřesněji vyjadřuje vztahy mezi nimi kvantitativní matematickou formou. Cílem je nejen poznat a popsat, ale především umět předpovídat. Předpovídat, jaké jevy nastanou v záměrně připravených podmínkách. Její metoda zahrnuje pozorování a experimenty, vytvoření pojmů, vypracování exaktně matematicky formulované teorie, výpočet předpovědí výsledků experimentů a jejich verifikaci. Souhlasí-li předpověď, je teorie dobrá, uspokojivě popisuje studovanou oblast jevů. Objeví-li budoucí pozorování a experimenty nesouhlas, třeba za podmínek dříve nestudovaných, je třeba teorii upravit, opravit, připadne i podstatně přeformulovat s využitím nových pojmu. Stará teorie, ve vymezených podmínkách poskytující dobré předpovědi, zůstává jako zjednodušené, omezeně použitelné přiblížení. Typickým a téměř modelovým příkladem je především fyzika a její historický vývoj posledních tří století. Snahou je vždy s dalším rozšířením a přeformulováním teorie obsáhnout stále širší a rozsáhlejší oblast jevů sjednocujícím univerzálním pohledem.

Člověk ovšem získané poznatky využívá podle své vůle, mění přírodu i své životní podmínky a způsob života. Dělá novodobou civilizaci plnou technických divů a vymožeností.

Všechny technické obory strojního inženýrství, elektroinženýrství, stavebního inženýrství, chemického inženýrství a tím spíše fyzikálního inženýrství, tedy obory fakult, jejichž studentům je tento text především určen, jsou vlastně na takto pojaté přírodovědě založeny. Bez ní by zmíněné obory prostě neexistovaly.

2 Úspěchy mechanických modelů

V jistém smyslu je základem tohoto pojetí klasická Newtonova mechanika, založená koncem 17. stol. Ta dosáhla v 18. a 19. stol. neuvěřitelných úspěchů. Dokázala popsat univerzálně platnými zákony pohyby planet na obloze, stejně jako pohyby mechanismů a strojních součástek na naší Zemi. Snesla doslova nebe na zem. S uplatněním nove vytvořeného matematického aparátu, totiž s pomocí diferenciálního a integrálního počtu, dokázala stát se základem teorie pružnosti, hydrodynamiky, aeromechaniky, teorie vlnových dějů ap. Svými pojmy (síla, energie, hybnost ap.) a matematickými metodami pronikla i do popisu elektrodynamických jevů a elektromagnetického pole. Stala se i výchozím bodem a nosnou kostrou pro formulaci kvantové mechaniky 20. stol., i pro kvantové teorie polí a teorie částic naší doby. Umělé družice i meziplanetární sondy přesně sledují dráhy vypočítané metodami klasické mechaniky.

3 Nikoli lacino odmítat, ale překonat

Přestože budeme v dalším ukazovat a zdůrazňovat slabosti a meze klasické mechaniky a siřeji i s její metodou spjaté novověké vědy a způsobu přírodovědného uvažování vůbec, jsme přesvědčeni, že požadavek exaktních formulací, experimentálního přístupu, předpovídání a ověřování předpovědí a jejich vhodného využití je nepominutelnou hodnotou a zůstává podstatou racionální vědecké metody natrvalo. Zůstane součástí lidského poznání.

Každý, kdo chce lacino mávnutím ruky (jak se v naší době stalo trochu i módou) zpochybnit a odmítnout »západní vědu« ve jménu ne dosti pochopených a prožitých východních filozofií a nekritických mysticismů, by měl být důsledný. Měl by se vzdát všeho co přinesla, včetně moderních dopravních prostředků, elektrického osvětlení, televize, počítačů, umělých látek, moderních lékařských přístrojů atd. atd. Její přístupy a pojetí je třeba rozvinout a překonat, ne prostě odmítnout.

Je ovšem pravda, že úspěch přírodovědy byl tak strhující a fascinující, že svedl až k přílišné pýše, domýšlivosti a neskromnosti. Zdálo se, že její způsob nazírání přírodního dění není jen významnou etapou, ale zeje vyvrcholením a definitivním stupněm a formou lidského poznání. Skutečnost, že lidé nevyužívají získaného poznání vždy jen ke svému rozvoji a zlepšení života, ale že v jejich rukou může být dokonce i nebezpečím a vážnou hrozbou, je v této souvislosti chápána jako problém jiného druhu.

4 Věda a člověk

Vědecká idealizace se osvědčila; se zdarem postupně odhaluje zákony, kterými se příroda řídí. Člověka umí zařadit do světa živočichů. Z přírodovědného poznání odvozená medicína je neobyčejně úspěšná. Člověku je vymezeno vrcholové místo v rozvoji postupných vývojových přeměn přírody a života, o nichž se předpokládá, že jsou v rámci tohoto pojetí vysvětlitelné.

Přesto však svět, jak jej zná vědec, je světem, který jeho samého jaksi neobsahuje. Pro toho, kdo svět popisuje, v něm není vlastně dobře připravené místo. Přes vítězné tažení vědy je stále tajemstvím jak to, že věda je vůbec možná. Vědecký popis je svou povahou popisem zvenčí, shůry, je popisem, který náleží vlastně Bohu. Věda odděluje experimentální a transcendentální. Člověk má sumu vědomostí, neví však, čím je on sám.

5 Laplaceův determinismus

Rozvoj mechaniky a s ní související rozvoj dalších věd vedl v 18. a 19. stol. až k představě světa jako dokonalého mechanismu, jehož vývoj v čase je přírodními zákony plně a jednoznačně determinován. Laplace, který bývá citován jako představitel nejvyhraněnějšího determinismu, soudil: *Měli bychom tedy nahlížet přítomný stav vesmíru jako důsledek předchozího stavu a jako příčinu stavu budoucího.*

Pohybové zákony mechaniky, po Newtonovi několikrát elegantně matematicky přeformulované v tzv. analytické mechanice, mají tvar diferenciálních rovnic. Pro takové rovnice, které se zde mohou vyskytnout, není příliš obtížné dokázat, že za daných, tzv. počátečních, podmínek řešení existuje a je právě jediné. Známe-li stav systému, tj. polohy a rychlosti všech částic, které systém vytvářejí, můžeme, alespoň v principu, s libovolnou přesností vypočítat stav systému i kdykoli v budoucnosti či v minulosti.

Dokázat, že řešení existuje a umět je efektivně nalézt jsou však dvě odlišné věci. Analytické řešení ve formě formule přichází v úvahu jen výjimečně, především u rovnic lineárních. Jinak jsme odkázáni na řešení jen přibližná, aproximativní. Jako samozřejmá pomoc se nabízejí počítací stroje. Je snad i trochu ironií, že právě metody spojené s programováním a s tzv. algoritmickou teorií složitosti, umožňují ukázat, že představa, že všechno je možno »vypočítat«, je představou klamnou a principiálně omezenou.

6 Místo pro náhodu

Už v době Newtonově a Laplaceove bylo ovšem známo, že ne vše lze jednoduše vypočítat a předpovědět. Již tehdy kladli matematikové (v té době především příslušníci rodu Bernoulliů) základy tzv. počtu pravděpodobnosti, teorie kvantitativně popisující »čistou náhodu«. Kdyby při hodu kostkou, mincí, či v ruletě bylo možno potřebné údaje změřit a výsledek vypočítat, patřili by matematici a fyzikové mezi zámožné občany.

Kinetická teorie plynů, statistická fyzika a další fyzikální disciplíny, pracující se složitými systémy, složenými z mnoha částic, berou ovšem v úvahu pojem pravděpodobnosti a představu náhody. Maxwell před více než sto lety dokonce pronesl: *Skutečná logika tohoto světa spočívá v počtu pravděpodobnosti.* Vždy se však věřilo, že jde o problém spíše »technický« než zásadní. Počet pravděpodobnosti byl chápán jako východisko z nouze, umožňující obejít nedostatek v našich »kapacitních« možnostech změřit polohy a rychlosti jednotlivých molekul a poté počítat a sledovat jejich individuální pohyby. Vždyť v makroskopickém tělese je molekul 10^{20} a více. Z praktických důvodů nemůžeme ani pomyslet na splnění takového programu. Nikdo však nezpochybňuje představu, že každá individuální molekula se pohybuje podle přesných deterministických zákonů.

7 Prostoročas

Ani teorie relativity nezměnila toto základní nazírání. Zřícení se mnoha dříve bez výhrad přijímaných představ, kupř. představy o libovolně velkých rychlostech či o absolutním pojetí současnosti, vedlo ovšem k dalekosáhlým důsledkům, kupř. k nalezení vztahu mezi energetickým obsahem E fyzikálního objektu a jeho setrvačnými vlastnostmi, měřenými jeho hmotností m. Platí $E = mc^2$, kde c je mezní rychlost pohybu částic a maximální rychlost přenosu signálů (rychlost světla). Uznání konečné rychlosti c vedlo ovšem k přeformulování kauzality do relativistické podoby. Jen některé události mohou být sobě navzájem příčinou a účinkem, jen takové, jejichž prostorová odlehlost dl a časový interval dt umožňují přenos interakce mezi nimi, $dl \le c \cdot dt$.

Základní přísně deterministické schéma však teorií relativity ovlivněno nebylo. Sjednocující prostoročas jen spíše ještě úžeji sepjal minulost a budoucnost ve, v podstatě »statickém« a celou »historii najednou« obsahujícím, čtyřrozměrném kontinuu. Prostorové a časové vztahy jsou jen dílčími relativními projevy vztahů mezi událostmi tak, jak se čtyřdimenzionální odlehlost promítá do zvolené inerciální vztažné soustavy. V obecné teorií relativity je sice možno konstruovat i model vesmíru jako celku a rámcově popsat jeho »vývoj« od počátku, tj. od »velkého třesku«, k současnosti a budoucnosti, striktně deterministická povaha popisu přírodního dění však zůstává zachována. Jak hluboce deterministický byl Einsteinův pohled na svět dokládá známý výrok (pronesený v souvislosti s jeho postoji ke kvantové mechanice): *Nemohu uvěřit tomu, že Bůh s námi hraje v kostky*.

8 Pravděpodobnost v kvantové mechanice

Významný náraz a trhlinu do neotřesitelně deterministického pojetí přírody způsobila kvantová teorie. Tato teorie světa molekulárních struktur, atomů a subnukleárních částic je vlastně autentickou fyzikou 20. století. Právě z ní se odvíjejí pokroky techniky a technologie naší doby (jaderná energie, kvantová elektronika, mikroelektronika, kvantová chemie...). Vyrůstá sice z klasické mechaniky a užívá jejích pojmů, podstatně však modifikuje pojetí fyzikálního objektu a popis jeho stavu. Odmítá v makrosvětě vyabstrahovanou představu objektu jako částice či tělesa pohybujícího se spojitě v prostoru a čase.

Kvantová mechanika přinesla do teorie neodstranitelné a apriorní pravděpodobnosti možných výsledků měření. Jaký výsledek měření bude pozorován (za co nejúplněji vymezených podmínek) lze popsat jen pravděpodobnostně, nikoli jednoznačně deterministicky. Deterministickou povahu však zachovává časový vývoj stavové funkce, vyjádřený tzv. časovou Schrödingerovou rovnicí. V tomto ohledu je i kvantová teorie teorií deterministickou.

Současná měření polohy a hybnosti, energie a času a obecněji všech veličin, jejichž (tj. jim v kvantové mechanice přiřazené) operátory nekomutují, jsou ve své přesnosti principiálním způsobem omezena (tzv. Heisenbergovými relacemi neurčitosti, $dx \cdot dp \geq \hbar / 2, dE \cdot dt \geq \hbar / 2, kde\ \ \hbar = h / 2\pi$). Užívání pojmů odvozených z naší zkušenosti v makrosvětě k popisu dějů v mikrosvětě má své meze. Je však nezbytné, abychom mohli problém vůbec formulovat, popsat měření a abychom si vůbec rozuměli. Použití rovnic a formulí kvantové mechaniky při konkrétních výpočtech a vyhodnocování experimentů nevyvolává žádná nedorozumění a pochybnosti. Jejich interpretace a filozofické vysvětlení však stále není uzavřenou kapitolou. Zdá se, že se zde otevírají velice závažné podněty a možnosti k přeformulování samých základů chápání přírodního dění. Zejména ve vztahu k pojetí procesu měření, včlenění pojmu informace ap., a snad i k pojmu vědomí. Obrysy této cesty však nejsou ještě zřetelné.

9 Deterministický chaos

Tato stať však nechce rozebírat tyto otázky. Vraťme se zpět do říše klasické fyziky, do fyziky bez kvantových jevů. Zde (a v jistém smyslu zde především!) se překvapivě vyjevil podivuhodný charakter souvislosti mezi zdánlivě zcela neslučitelnými pojmy, jednoznačnou determinovaností a nepředpověditelnou nahodilostí.

Vědecká disciplína, v níž se paradoxní vztah determinovanosti, avšak zároveň nepředpovídatelnosti zřetelně vyjevil se nazývá teorie deterministického chaosu. Je to disciplína velmi mladá, intenzivně pěstovaná ani ne dvě desítky let. Nevstoupila dosud do standardních učebnic a učebních plánů. Nabízí však slibné perspektivy. Její souvislosti jsou široké a její stoupenci soudí, že ve svých důsledcích může znamenat převrat v přírodovědě srovnatelný s tím, co přinesly teorie relativity a kvantová mechanika na počátku století.

I když tyto řádky nemohou a nechtějí být výkladem této teorie, ale spíše zhodnocením poučení, které teorie přináší, zdá se nám účelné a žádoucí ji zamýšlenému čtenáři alespoň trochu naznačit. Žádný student technického směru se ve svém oboru nemůže obejít bez určité znalosti matematiky. Matematika je způsobem vyjadřování přírodních zákonů. Proč se tedy úplně vyhýbat tomuto nejvlastnějšímu jazyku, kterým je zmiňovaná teorie formulována a v němž lze i její poznatky a filozofický obsah nejlépe a nejpřesněji sdělit? Snad to některé čtenáře přivede i k hlubšímu zájmu a k dalšímu studiu a to i ku prospěchu jeho vlastního studia.

10 Dynamické systémy

Dynamické modely, které popisují časový vývoj nejrozmanitějších systémů, které věda a technika studují, bývají zpravidla (nebo alespoň po vhodné úpravě mohou být) popsány soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i\left(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\right), \ i = 1,2,...,n$$

Jedná se o soustavu n spřažených diferenciálních rovnic. Zadání n funkcí $n + s$ proměnných F_i, $i = 1, 2, \ldots n$, na pravých stranách, znamená vlastně formulování studovaného modelu. Veličiny α_1, α_2,..., α_s jsou parametry, na nichž může chování dynamického systému podstatně záviset (materiálové konstanty, hodnoty vnějších parametrů, vazebné konstanty ap.). Proměnná t označuje čas.

Veličinami X_i mohou být nejrozmanitější fyzikální i jiné veličiny, podle povahy úlohy. Mohou to být kupř. souřadnice, rychlosti, napětí, proudy, koncentrace chemických látek, teplota, intenzity elektrických a magnetických polí, počty jedinců různého druhu v populaci, počty krvinek v jednotce objemu, v ekonomických modelech třeba i ceny nebo úrokové míry atp. Soubor hodnot $X_i(t)$ představuje stav systému v daném čase. Ve studovaném modelu časové změny veličin X_i známým způsobem (podle funkcí $F_i(X_1, X_2,\ldots X_n, \alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s)$) závisejí na okamžitých hodnotách všech veličin X_i, $i = 1, 2,. .n$.

Nalezení časového vývoje stavu, tj. vyřešení soustavy rovnic, znamená nalezení n funkcí $X_i\{t)$ jako funkcí času, splňujících zadané počáteční podmínky $X_i(0) = X_{i0}$.. Z počátečního stavu soustavy v čase $t = 0$ můžeme tedy stanovit jednoznačně stav soustavy v kterémkoli čase pozdějším. Jsou-li funkce F_i lineární, lze soustavu snadno řešit a řešení exaktně vyjádřit. To je však výjimečný, mezní případ. V dalším budeme předpokládat, že funkce F_i jsou obecně nelineární. V takovém případě nalézt řešení není vůbec jednoduché, obecně není analyticky vyjádřitelné a bohatství možných řešení je překvapující.

Do teorie dynamických systémů spadá i celá klasická mechanika. Její rovnice 2. řádu, obsahující zrychlení, lze přepsat na dvojnásobný počet rovnic 1. řádu nahoře zmíněného typu zavedením složek rychlosti jako nových proměnných. Zrychlení je první derivací rychlosti, rychlost je první derivací polohy. Také rovnice popisující chování elektrických obvodů lze takto zapsat. Dynamické systémy však zahrnují ještě mnohem širší třídu modelů ze všech oblastí vědeckého zkoumání a technického popisu.

11 Časový vývoj stavů

Velmi efektivním a přehledným způsobem jak sledovat dynamiku studovaného systému je zavedení myšleného n-rozměrného matematického tzv. fázového či stavového prostoru se souřadnicemi $X_1, X_2,\ldots X_n$.. Bodu v tomto prostoru odpovídá stav, tj. soubor okamžitých hodnot X_i. Časový vývoj systému je zobrazen časovou změnou polohy takového body, tj. trajektorií (orbitou) ve fázovém prostoru.

Trajektorie vývoje stavů ve fázovém prostoru mohou být velice rozmanité a složité. Dva původně sobě blízké stavy mohou svojí vzdálenost s časem zachovávat, mohou se k sobě přibližovat, mohou se však také s časem navzájem od sebe vzdalovat. Rychlost tohoto vzdalování se může mít i exponenciální charakter. Hovoříme pak o citlivé závislosti na počátečních podmínkách. Malá změna může po určitém čase vést k úplně odlišnému chování. Tento proces bývá charakterizován jako tzv. »motýlí efekt«: Zatřepetá-li dnes motýl křídly v Tokiu, může se to projevit jako vichřice v New Yorku o měsíc později.

12 Nemožnost dlouhodobých předpovědí

Narůstá-li vzdalování se stavů exponenciálně s časem, vede to k fatální nemožnosti dlouhodobých exaktních předpovědí. Každé stanovení stavu je totiž experimentálně zatíženo určitou nepřesností. Ta nám umožňuje po určitou dobu, s předem stanovenou zvolenou přesností, předpovídat budoucí stavy. Prodloužíme-li lineárně dobu, po kterou chceme se zvolenou přesností předpovídat, musíme zpřesnit naši znalost počátečních podmínek nikoli také lineárně, ale exponenciálně, tj. mnohem více. Vyjádřeno naopak: zpřesníme-li naši znalost počátečních podmínek, prodlouží se nám doba úspěšné předpovědi, avšak nikoli úměrně, ale podle logaritmické závislosti, tedy méně než bychom si přáli. V závodě s exponenciálním narůstáním vzdalování se stavů nemůžeme obstát, jsme bezmocní.

I když každá trajektorie je jednoznačně a nekonečně přesně deterministicky určena, vzhledem ke konečné přesnosti každého našeho měření je dlouhodobé chování systému nepředpovídatelné. Nepředpovídatelnost znamená pro nás chaos. Hovoříme proto o deterministickém chaosu.

Technicky je sbíhání či rozbíhání se trajektorií v n-rozměrném fázovém prostoru v *n* násobě nezávislých směrech popsáno soustavou *n* tzv. Ljapunovových exponentů. »Rychlost zapomínání« počátečních podmínek a tím i možnost předpovídání je charakterizována tzv. metrickou (Kolmogorovovou) entropií.

13 »Všudypřítomnost« chaosu

Modely s chaotickou dynamikou byly studovány nejen ve fyzice (fyzika plazmatu, fyzika pevné fáze, supravodivost, lasery, urychlovače částic…), astronomii a astrofyzice, geofyzice, hydrodynamice (nástup turbulence...), fyzice atmosféry, v technice (vázané kmitavé systémy, elektrické obvody...), ale i v chemii (autokatalytické reakce a jejich kinetika), biologii (dynamika populací...), medicíně (činnost srdce, aktivita mozku, imunitní systém...), ba i v sociologii (demografické modely) a v ekonomii (nelineární modely trhu).

Kde všude se může deterministický chaos vyskytovat? Zhruba řečeno: všude tam, kde lze aplikovat k popisu vhodný nelineární model. Nelinearita vztahuje tou základní nutnou, avšak ne postačující podmínkou, vedoucí k citlivé závislosti na počátečních podmínkách. Ta se projevuje tím, že alespoň jeden Ljapunovův exponent je kladný a vzdalování se stavů je tedy exponenciální. Požadavek nelinearity není ovšem omezením. Svět je v podstatě nelineární, lineární vztahy jsou vlastně jen výjimkou a uplatní se jen v omezeném rozsahu; neplatí nikdy přesně. Omezující podmínkou, aby daný model mohl vykazovat chaos však je, aby byl nejméně třírozměrný, $n \geq 3$. Jen ve třech dimenzích mohou být trajektorie složitě zapleteny »jako špagety« a mohou »vázat na sobě uzly«. V dvojrozměrné rovině to možné není.

Významně záleží na hodnotách řídících parametrů $\alpha_1,..., \alpha_s$ Pro některé jejich hodnoty je chování systému pravidelné, regulární, spořádané, pro jiné nepravidelné, neuspořádané a neočekávaně rychle se měnící. Tentýž systém tak může vykazovat chování pravidelné i chaotické, v závislosti na hodnotách těchto parametrů.

Souhrnně lze konstatovat, že chaos je zcela běžným, univerzálním jevem. Neznamená to však, že jsme nucení rezignovat a že nemůžeme o přírodě nic vypovídat. Ostatně, přiměřená míra chaosu je užitečná a je významnou součástí života živých organismů i nás samých. (Paul Valéry: *Dvě nebezpečí ohrožují svět: pořádek a nepořádek.)*

14 Disipativní systémy

Zvláštní pozornost si zaslouží tzv. disipativní systémy, tj. systémy, které mají tu vlastnost, že ať se počáteční stav nachází kdekoli (v určité oblasti, tzv. oblasti přitažlivosti) ve fázovém prostoru, s rostoucím časem se trajektorie stahují do určité části tohoto prostoru s nulovým objemem. Jsou těmito oblastmi, zvanými atraktory, přitahovány. Atraktory souvisí s limitním chováním se systémů po odeznění »přechodových jevů « v čase $t \to \infty$. Charakter tohoto limitního chování může podstatně záviset na hodnotách řídících parametrů. Při jejich změně dochází při určitých kritických hodnotách těchto parametrů k náhlé, kvalitativní změně v typu atraktoru a druhu pohybu. Takovému jevu se říká bifurkace.

Nejjednodušším atraktorem je bod, který odpovídá stavu klidu. Hodnoty veličin $X_i(t)$ se přibližují jistým hodnotám a v čase poté se již nemění. Příkladem může být pohyb kyvadla, které v důsledku tření a znehodnocování mechanické energie třením na teplo (tj. disipací) se posléze zastaví. Poloha ani rychlost se pak již nemění. Jiným příkladem možného atraktoru je uzavřená orbita (tzv. limitní cyklus), podél níž systém trvale obíhá. Ilustrací je kyvadlo hodin, kterému je trvale dodávána energie zvenčí poklesem závaží či z elektrické baterie. Takový systém je disipativní, znehodnocuje energii, ta je však trvale doplňována. Systém je ovšem otevřený, je v kontaktu s okolím.

Právě otevřené disipativní systémy jsou nadějnými modely pro pochopení základních funkcí živých organismů.

Pozoruhodným systémem tohoto druhu je kupř. série autokatalytických chemických reakcí (tzv. Bělousov-Zabotinského reakce), jejichž kinetika má charakter nelineárního dynamického systému. (Pro zajímavost: když B. Bělousov zaslal svoji práci k otištění do sovětského vědeckého časopisu, dostal odpověď, že takové chování není možné a práce otištěna nebyla. Teprve po létech mu byla r. 1980 posmrtně udělena Leninova cena.) Je-li reakce uskutečněna v průtokovém chemickém reaktoru, lze periodické změny koncentrací látek, projevující se změnou barvy, pozorovat neomezeně dlouho.

Reakcemi tohoto typu byl inspirován I. Prigogine se svými spolupracovníky, když pionýrsky usilovali o pochopení jevů samoorganizace a vytváření struktur na půdě nelineární a nerovnovážné termodynamiky. Vhodný systém chemických reakcí by tak mohl hrát roli »biologických hodin« při odečítání času v živém organismu.

15 »Podivné« atraktory

Velkým překvapením bylo zjištění, že u nelineárních disipativních systémů se mohou vyskytovat i atraktory velice zvláštní, které nemají povahu bodů, uzavřených čar či toroidálních ploch, jak je tomu u atraktoru obvyklé. Byly nazvány atraktory »podivné«. Když r. 1963 Edward Lorenz náhodně první (a dodnes asi nejznámější) takový atraktor objevil při svých počítačových simulacích, odvozených z jisté úlohy z fyziky atmosféry, nebral nikdo jeho článek na vědomí. Výsledek byl považován za vnitřní problém zvoleného způsobu výpočtu nebo snad i za omyl. Teprve po patnácti letech v souvislosti s dalšími studiemi chaotických systémů nastala horečka v hledání takových systémů doslova všude: na zemi, ve vzduchu, pod vodou, ve vesmíru, v systémech hmotných i myšleně konstruovaných. Všude tam, kde lze aplikovat nelineární dynamické modely. Pohyb po atraktoru je chaotický, proto se dnes častěji než podivné označují jako chaotické atraktory.

Zdánlivě jsou chaotické chování (spjaté se vzdalováním se stavů původně sobě blízkých) a disipativní charakter systému (jehož trajektorie se stahují do omezené oblasti fázového prostoru s nulovým objemem) navzájem sobě odporující požadavky.

Ty lze sloučit jen tak, že se v některých směrech trajektorie rozbíhají, v jiných však (a to ještě rychleji) k sobě přibližují. Aby rozbíhání stavů »podél« atraktoru bylo možné bez omezení, je nutné, aby s roztahováním se uplatňoval i proces jakéhosi zpětného překládání ve tvaru koňské podkovy, jakéhosi »faldování« a vracení se. Chaotický atraktor má pak strukturu, kterou si můžeme přibližně představit jako naskládání nekonečně mnoha listů někde až nekonečně blízko k sobě přiložených. Pak se může stát, že dva stavy ležící na různých listech mají k sobe sice blízko v příčném směru, avšak ve směru podél listů atraktoru velmi, velmi daleko.

16 Fraktály

Chaotické atraktory mají povahu tzv. fraktálu. Přísluší jim neceločíselné metrické dimenze.

Běžně jsme zvyklí na geometrické útvary, které označujeme jako bod, čára, plocha či trojrozměrné těleso. Jejich dimenze jsou postupně 0, 1, 2 a 3. Jiné, než celočíselné hodnoty si neumíme ani představit, připadají nám absurdní. Přesto je možné předchozí pojem tzv. topologické dimenze zobecnit. Je možné zavést pojem tzv. metrických dimenzí, jejichž hodnotami mohou být jakákoli nezáporná reálná čísla. Pro hodně členité, roztrhané a vnitřně do nekonečna opakovaně strukturované množiny jsou takovéto dimenze prostředkem, jak míru jejich složitosti vyjádřit.

Takovým množinám říkáme fraktály. Při zkoumání jejich částí do větších a větších podrobností objevujeme nové a nové detailní členění. Dnes jsou překrásné barevné obrázky fraktálu dostupné a známé především díky vyspělé počítačové grafice. Pres složitost jejich struktury leží v základě jejich vytváření jen opakovaně uplatňovaná velmi jednoduchá pravidla.

Ostatně, nespočívá fakt, že se nám fraktály líbí a že nás upoutávají a fascinují, právě v této skutečnosti? »Nerezonuje« v nás cosi, co je vlastní i nám samým?

Přidá-li se do počítačové tvorby fraktálu i něco nepravidelnosti a chaotičnosti popsané jen pravděpodobnostně, mohou takovéto obrázky překvapivě věrně imitovat obrazy stromů, rostlin, horských scenérií ap. Je to náhoda?

17 Cantorova množina

Příčná struktura řady atraktoru dynamických systémů má charakter podobný tzv. Cantorově množině. Pro hloubavé studenty připojme jako hru »návod jak ji zkonstruovat«:

> Vezmi uzavřený interval <0,1>. Rozděl jej na třetiny a prostřední třetinu vyjmi, ponech jen obě krajní třetiny, a to i s koncovými body. Dostaneš dva intervaly < 0,1/3 > a < 2/3,1 >. Z každého z nich vyjmi opět střední část bez koncových bodu. Získáš množinu < 0,1/9 > U < 2/9,1/3 > U < 2/3,7/9 > U < 8/9,1 >. Opakuj tento postup až do nekonečna. Co zbude z původního intervalu je Cantorova množina *C*.

Zbylo málo či mnoho? Míra (tj. délka, tedy vlastně »jednorozměrný objem«) množiny C je nula. (V každém kroku se délka zmenšila na 2/3 délky předchozí a $2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 \cdot ... = 0$.) Přesto zůstalo bodů nekonečně mnoho. Jsou to ty body, jimž odpovídají čísla zadaná v trojkové soustavě jen pomocí nul a dvojek, kupř.

0.200222002002022002220202000020 2...

(Jedničky, jimž odpovídají vždy prostřední třetiny, chybějí.) Ve smyslu teorie kardinálních čísel z teorie množin zůstalo vlastně bodů právě tolik, kolik jich obsahoval původní interval, totiž nespočetně mnoho. Co zbylo, není ani bod, ani úsečka. Lze ukázat, že tzv. Hausdorffova metrická dimenze Cantorovy množiny činí D = Iog2/log3 = 0.63092975 ...

Jistě jste si povšimli ošidného doporučení:.Opakuj postup až do nekonečna. Taková úloha je však vložena do celé řady pojmů matematické analýzy a do struktury reálných čísel vůbec. V tom je jejich síla, ale i slabost, jak naznačíme později.

18 Determinismus a nahodilost

Předchozí stránky nám ukázaly, že determinismus a nahodilost se nevylučují. Před rozvojem teorie deterministického chaosu bývaly fyzikální a vůbec přírodní zákony zpravidla rozdělovány do dvou odlišných skupin. Zákony deterministické popisovaly jednoznačně a absolutně přesně chování systémů, ke kterým se vztahovaly, pojem pravděpodobnosti nepotřebovaly, nahodilost jim byla pojmem zcela cizím. Zákony statistické využívaly pojmu náhoda a své závěry vyjadřovaly pravděpodobnostně.

V klasickém, makroskopickém pojetí byly deterministické zákony považovány za prvotní a zákony statistické za druhotné, aplikované pro systémy a také situace s neúplnou znalostí jejich stavu a popisu. Ve fyzice to byly především systémy, skládající se z mnoha částic a situace, v nichž hrály roli tepelné jevy. Statistický popis byl chápán jako důsledek nezvládnutelně velkého počtu stupňů volnosti takového systému.

Teorie deterministického chaosu ukázala, že chaotické, nepředvídatelné a jen pravděpodobnostně popsatelné chování mohou vykazovat i systémy překvapivě jednoduché, kupř. matematické kyvadlo s pohyblivým závěsem, nelineárně spřažené oscilátory ap. Stačí minimální počet tří stupňů volnosti a tím pouhé tři rovnice, popisující dynamiku systému.

Stojí za zmínku, že již na začátku století H. Poincaré upozorňoval na nestability vlastní klasické mechanice tří nebeských těles. Jeho podněty a upozornění vsak zůstaly nevyslyšeny a nepovšimnuty. Na osvětlenou scénu pozornosti vystupovaly tou dobou šokující teorie relativity a kvantová teorie atomárního světa.

Citlivá závislost na počátečních podmínkách a nestabilita dynamického chování jednoduchých systémů byla ovšem už dávno předtím notoricky známa, kupř. z hazardních her. I hod kostkou či mincí a kolo rulety se řídí Newtonovou mechanikou.

Byla to přezíravost a nezájem nebo spíše bezradnost a bezmocnost v době bez počítačů? Matematika té doby již připravovala nezbytný aparát, kupř. Cantorova množina či Hausdorffova dimenze jsou pojmy z té doby. Počítače se však nemohly objevit dříve, než kvantová mechanika umožnila rozvoj fyziky pevné fáze a vznik mikroelektroniky.

Dnes víme, že nejvlastnějším jádrem náhodného chování a statistických zákonitostí není ani tak velký počet stupňů volnosti či nekontrolovatelnost vnějších vlivů, ale především nelineární vnitřní dynamika, vedoucí k citlivé závislosti na počátečních podmínkách a tím k nestabilitě a chaotickému chování. Dynamický řád je sice jednoznačný při nekonečné přesnosti popisu, při dostupné konečné přesnosti jsou však pohyby dlouhodobě nepředpovídatelné. Systém v důsledku nelineárnosti ztrácí paměť, ztrácí záznam o svých počátečních podmínkách. Ty pak nejsou důležité, dochází k tzv. procesu míšení a pravděpodobnostní, statistický popis je nejen možný, ale vlastně jediný efektivně možný a vhodný. Základem statistických zákonů jsou tedy zákony dynamické, avšak s vnitřní nestabilitou a chaotickým chováním.

19 Turbulence

Snad nejznámějším, dlouhodobě řešení odolávajícím problémem klasické fyziky je problém turbulence. Konečnému řešení odolává již celé století, přečkal vznik relativity i kvantové fyziky. Konstruujeme modely celého vesmíru a nahlížíme do neviditelného světa subnukleárních částic, jev turbulence dostatečně uspokojivě popsat však stále ještě nedokážeme.

K zádumčivému zamyšlení přivádí fyzika nejen velkolepá scenérie bizarní tříště mořského příboje v bouři na skalnatém pobřeží, ale i skromný bublající tok horského potoka, skákajícího mezi balvany, ba i obyčejný proud vody vytékající z vodovodního kohoutku do vany, v níž se právě koupe.

Zdá se však, že jsme v řešení úlohy přece jen významně pokročili. Hydrodynamický systém turbulentního proudění je popsán soustavou parciálních diferenciálních rovnic a z hlediska mechaniky kontinua má tedy nekonečně mnoho stupňů volnosti. Experiment i teorie však nasvědčují tomu, že v turbulenci (alespoň při tzv. málo rozvinuté turbulenci) se uplatňuje jakýsi nízkodimenzionální disipativní dynamický systém s chaotickým atraktorem. Odhad fraktální dimenze atraktoru, provedený počítačovým vyhodnocením experimentálních dat, by pomohl stanovit, kolik asi stupňů volnosti se opravdu efektivně uplatňuje, a kolik proměnných tedy musí obsáhnout model, který by turbulenci umožnil uspokojivě popsat. Je to snad pro teorii deterministického chaosu tak trochu i prestižní záležitost. Vždyť v obecné řeči turbulence a chaos jsou téměř synonyma.

20 Systémy s » diskrétním časem «

Vícekrát jsme se zmínili o tom, že nejmenší počet stupňů volnosti dynamického systému, který může vykazovat chaotické chování, jsou tři. To platí pro systémy, jejichž dynamika je popsána diferenciálními rovnicemi. Někdy však stačí i mnohem méně. Chaotické iterativní systémy mohou být i jednorozměrné.

Řada jevů v přírodě může být popsána dynamickými systémy s tzv. diskrétním časem T_i = 0,1,2,..., vyjádřeným ve vhodných časových jednotkách. Takové modely lze získat z modelů se spojitým časem kupř. tak, že stav systému se zaznamenává jen stroboskopicky, v diskrétních časových okamžicích, nebo tak, že se registrují průsečíky spojité fázové trajektorie s vhodnou příčně uloženou plochou (tzv. Poincaré-ho řezy). Jednorozměrné zobrazení tohoto typu má tvar $X_{n+1}=f(X_n, \alpha)$, n = 0, 1, 2,... Hodnota veličiny X_{n+1} v »čase« n+1 tak závisí známým způsobem, zadaným funkcí f, na hodnotě X_n v předchozím »čase« n. α představuje vnější, řídící parametr.

Nejznámějším a nejrozšířenějším příkladem je tzv. logistické zobrazení tvaru:

$$X_{n+1} = \alpha X_n(1-X_n).$$

Takováto rovnice může být kupř. modelem pro změny počtu jedinců v hmyzí populaci v za sebou následujících letech. Studentům, kteří mají přístup k počítači je možné doporučit, aby si s ní trochu pohráli. Získaná zkušenost a poučení za to rozhodně stojí. Konstantu α volme mezi hodnotami 0 a 4. Za počáteční hodnotu X_0 vyberme libovolné číslo mezi 0 a 1. Postupně můžeme počítat další iterace X_0, X_1, X_2, ... atd. Volme nejprve α = 2. Záhy se ukáže, že ať začneme z kterékoli hodnoty X_0 (kupř. X_0 = 0.4 nebo X_0 = 0.6 ap.), vždy se získaná posloupnost blíží svému atraktoru, hodnotě X' = 0.5000. Zvolíme-li kupř. α = 3.2, budou se hodnoty X_n postupně vždycky přibližovat dvoubodovému atraktoru X' = 0.5130 a X'' = 0.7995. Mezi těmito hodnotami budou další iterace pak již jen oscilovat s periodou T = 2. Zvolíme-li α = 3.5, budou se hodnoty X_n přibližovat atraktoru skládajícímu se ze čtyř bodů X' = 0.5009, X'' = 0.8750, X''' = 0.3828, X'''' = 0.8269. Perioda se proti předchozímu případu zdvojnásobí, T = 4. Proces bifurkací, spočívající ve zdvojování periody při určitých kritických hodnotách parametru α bude s růstem α stále pokračovat, T = 8, T = 16 atd., až při hodnotě α = 3.56994... bude perioda nekonečně dlouhá a proces bude nepravidelný, chaotický. Volbou α = 4 získáme dokonalý generátor náhodných čísel, posloupnost X_0, X_1, X_2, ... bude zcela náhodná, žádná pravidelnost se neobjeví. Při různých volbách X_0, byť sobě blízkých (zkuste třeba X_0 = 0.40 a X_0 = 0.41), se posloupnosti zcela rozejdou, »zapomenou« své počáteční podmínky.

Volba nelineární funkce $f(X_n)$ v našem případě je jednou z nejjednodušších možných, graficky znamená obrácenou a z počátku trochu vysunutou parabolu. Přesto úspěšně demonstruje jednu z univerzálních cest (tzv. proces zdvojování periody) vedoucí k chaosu, kterou můžeme experimentálně pozorovat za jistých okolností třeba v turbulenci nebo v počátku katastrofické srdeční příhody u nemocného člověka.

Není úžasné, kolik bohatství a rozmanitosti v sobe skrývá tak prostá formule, je-li použita opakovaně? Není to i filozofická výpověď o povaze našeho světa?

Poznámka pro zasvěcené: Mandelbrotova množina, tolik populární v počítačových programech týkajících se fraktálu, souvisí úzce s dvojrozměrným diskrétním dynamickým systémem $Z_{n+1} = Z_n^2 + \alpha$, kde čísla Z_n, Z_{n+1} a Z_0 jsou však komplexní čísla.

21 Bernoulliův posuv

Nejjednodušším a nejprůhlednějším dynamickým systémem, který je plně chaotický, je zobrazení nazývané Bernoulliův posuv

$$X_{n+1} = 2X_n(Mod\,1), \quad X_0 \in <0,1>, \quad n = 0,1,2,...$$

Zápis (Mod 1) znamená ponechat jen část čísla za desetinnou čárkou, tj. znamená oddělit a ignorovat celou část příslušného čísla. Hodnoty *Xn* tak stále zůstávají v intervalu <0,1>. Je účelné libovolnou počáteční hodnotu X_0 vyjádřit ve dvojkové soustavě. Čísla ležící mezi 0 a 1 jsou tak vyjádřena jako nekonečné posloupnosti nul a jedniček za desetinnou čárkou. Zdvojnásobit číslo znamená prostě celou posloupnost posunout o jedno místo doleva. Mod 1 říká, že objeví-li se tím před desetinnou čárkou jednička, máme ji ignorovat.

Uváděný příklad je tak závažný, že doporučujeme čtenáři si jej dobře rozmyslet a porozumět mu. Ukažme postup konkrétně. Zvolme X_0 = 0.011000101110... Počítejme pak postupně X_0, X_1, atd.

X_0 = 0.011000101110...
X_1 = 0.11000101110...
X_2 = 0.1000101110...
X_2 = 0.000101110... (oddělena 1 před des.čárkou)
X_A = 0.00101110... (oddělena 1 před des.čárkou)
X_5 = 0.0101110...
atd.

Postup je možno chápat i tak, Že necháme číslice na svých místech, jen v každém kroku posouváme desetinnou čárku o jedno místo vpravo a případné jedničky před čárkou nebereme v úvahu

X_o = 0.011000101110...
X_1 = 0.11000101110...
X_2 = 0.1000101110... (oddělena 1)

$$X_3 = 0.000101110... \qquad \text{(oddělena 1)}$$
atd.

22 Nepředpovídatelnost

Pokusme si představit, že rovnice $X_{n+1} = \alpha X_1(1 - X_n)$ vyjadřuje nějaký přírodní zákon. (Je to příklad vyhrocený a nadsazený, postihuje však podstatu mnohých deterministických zákonů.) Posloupnost X_0, X_1, X_2, X_3 atd. pak vyjadřuje dynamický průběh odpovídajícího přírodního děje. Známe-li absolutně přesně X_0 známe naprosto přesně i X_1, X_2, X_3. Uvedený přírodní zákon je plně deterministický.

Každé lidské měření je však možné uskutečnit jen s konečnou přesností. Předpokládejme pro jednoduchost, že naše měření má přesnost dX = 1/2, tj. umožňuje nám změřit každé X_n jenom tak, že rozhodneme, zda toto číslo leží v prvé nebo v druhé polovině intervalu <0,1>. To znamená, že experimentálně můžeme určit jen první číslici po desetinné čárce, zda je to 0 (prvá polovina) nebo 1 (druhá polovina).

Sledujme experimentálně studovaný proces, tj. měřením stanovme v každém kroku místo přesné hodnoty X_0 jen její první cifru. V počátečním měření dostáváme 0, v následujícím 1, poté 1 atd. Série měření v našem případe dává 0-1-1-0-0-0- 1-0-1-1-1-0..., tj. přesně to, co obsahuje počáteční podmínka X_0. Vlastně pouze »čteme« počáteční stav X_0 cifru po cifře.

Ze série uskutečněných měření chceme nalézt zákon, který ji vytváří, a chceme umět předpovídat výsledky budoucích, dosud neprovedených měření.

Ze sebedelší, avšak konečné série n měření (tj. ze znalosti prvních *n* cifer počáteční podmínky), vsak nikdy nemůžeme předpovědět výsledek měření následujícího (tj. nemůžeme X_0 určit další cifry v rozvoji neznámé hodnoty X_0). Posloupnost uskutečněných měření, tj. posloupnost cifer 0 a 1, je tedy zcela nepředpověditelná, je zcela náhodná. Tato posloupnost je právě tak deterministická a tak náhodná jako série výsledků hodu mincí!

23 Chmurná perspektiva?

Chmurná perspektiva? Nikoli, jen varování, že s determinismem to zdaleka není tak jednoduché, jak soudil Laplace.

Připojme několik povzbuzujících poznámek:

a) Ne všechny dynamické systémy zmíněných typů (zadaných nelineárními diferenciálními rovnicemi či diskrétními iteračními postupy) jsou chaotické. Neumíme podle tvaru funkcí $F_i(X_1, X_2, ...X_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ či $f(X_n, \alpha)$ snadno rozhodnout, zda systém se bude či nebude chaoticky chovat.

b) Týž systém se pro některé hodnoty $\alpha_1 . . \alpha_s$, chová chaoticky, pro jiné nikoli (viz příklad logistického zobrazení $X_{n+1} = \alpha X_n(1-X_n)$ pro různé hodnoty α). Oblasti chaotické a nechaotické jsou často velice složitě proloženy. (V chaotické oblasti uvedeného zobrazení mezi α = 3.59 a α = 4 leží i mnoho regulárních periodických pohybů). Přiměřená míra chaosu není v přírodě rozhodně »na závadu«.

c) Ani u obecně chaotického systému není každá trajektorie chaotická. To záleží na počátečním stavu. Chaotické jsou jen »skoro všechny«. »Skoro všechny« v matematice znamená, že výjimky jsou vzácné, zanedbatelné v přesně vymezeném smyslu.

d) Zákony statistické, k nimž chaotické dynamické chování vede, jsou také dobrými zákony, umožňujícími vědecký popis jevů. (Při hodu mincí je pravděpodobnost pádu obou stran stejná, jedna polovina).

e) Vše mohou významně modifikovat kvantové jevy. Úplně přesné měření klasického stavu není možné, pojem bodu ve fázovém prostoru v kvantové fyzice ztrácí dobrý smysl.

24 Neúplnost formálních logických systémů

V poslední části našeho výkladu o determinismu a náhodnosti ještě naznačme překvapivou avšak hlubokou souvislost chaosu v přírodě s povahou a možnostmi lidského poznání. Teorie deterministického chaosu vypracovaná v přírodovědě, je hluboce spojena se závažnými otázkami logiky a základů matematiky a s metodologií vědy.

17. stol. filozof a matematik W. Leibniz předvídal, že při uvažování a odvozování bude v budoucnu možno prostě použít výpočtu. Rozvoj matematické logiky do počátku našeho století se zdál potvrzovat tuto naději. D. Hilbert r. 1900 směle prohlásil: Každý určitý matematický problém musí nezbytně umožnit exaktní urovnaní, a to buď formou skutečné odpovědi na položenou otázku, nebo důkazem nemožnosti jeho řešení a tedy neúspěšnosti všech pokusů...

Řešení musí vyplynout po konečném počtu logických postupů... Hilbert byl tedy přesvědčen, že všechny matematické otázky jsou v principu rozhodnutelné.

R. 1931 však, tehdy 25 letý, rakouský logik K. Gödel, rodák z Brna, podal důkaz, že toto přesvědčení bylo mylné. Ukázal, že žádný konečný systém axiomů a metod nemůže obsáhnout všechny matematické vlastnosti ani kladných celých čísel. Ukázal, že všechny formální systémy matematické logiky jsou neúplné. Lze v nich formulovat věty, které jsou pravdivé, ale jejichž pravdivost nemůže být v jejich rámci dokázána. Prostředky formálního systému zahrnují systém axiomů, gramatiku a způsoby odvozování.

Gödelův důkaz užívá paradoxů, které znali lidé už dávno, »již staří Rekové... «. Kréťan Epimenides řekl: Všichni Kréťané jsou lháři. Zdá se, že troufalost výpovědi o sobě má opravdu hluboké souvislosti.

Bez nároku na přesnost naznačme podstatu Gödelova nesnadného důkazu. Mějme formální systém, který je dosti bohatý na to, aby v něm bylo možno vyjádřit zákony aritmetiky. Důmyslným způsobem očíslování vyjádřil pak Gödel prostředky formálního systému (tj. znaky, formule a důkazy) v aritmetice samé. Použil formuli, jež vypovídá sama o sobe: Tato věta je nedokazatelná. Ukázal, že v jeho vyjádření jí odpovídá jakési aritmetické tvrzení o číslech, které je pravdivé, ale nelze je dokázat. V aritmetice tedy existují tvrzení, která jsou pravdivá, však nedokazatelná.

Která to jsou konkrétně, říci nemůžeme. Matematika však nabízí několik vhodných kandidátů: některá tvrzení v teorii čísel, na jejichž pravdivost se věří, zatím se však nikomu nepodařilo je dokázat. Např.: Neexistuje takové liché číslo, které by bylo součtem svých vlastních dělitelů (příklad takového sudého čísla 6 = 3 + 2 + 1). Nebo: Každé sudé číslo je součtem dvou prvočísel (př.: 18 = 13 + 5, 20 = 17 + 3...)

Každý formální systém je neúplný. Přidání dalších axiomů (nevedoucích ke sporu) možnosti důkazů rozšíří, opět však lze formulovat věty, jež nelze dokázat. Zdá se, že Gödelovým objevem ztratila matematika něco ze své tradičně uznávané jistoty a důvěry jako nejspolehlivější části poznání. Zůstává prvek neurčenosti, nejistoty a otevřenosti. Ti, kdož nemají matematiku již od školy rádi, by však neměli škodolibě tvrdit cokoli, třeba, že v rybníce je vodník. Sám důkaz omezenosti možností formálního přístupu je nepochybně vrcholným výkonem matematicky školeného ducha.

Později přeformuloval Gödelův důkaz o neúplnosti do přístupnější podoby A. Turing a ukázal, že jeho obsah je ekvivalentní tvrzení, že neexistuje žádná obecná metoda pro systematické rozhodování o tom, zda nějaký počítačový program vůbec někdy povede k zastavení stroje a ukončení počítání.

25 Algoritmická složitost

K dalšímu rozšíření Gödelových výsledků a jejich uvedení do souvislostí významných z hlediska teorie chaosu a přírodovědy vůbec, vedlo vytvoření tzv. algoritmické teorie informace a zkoumání algoritmické složitost číselných rad. Jedním z nejpřednějších představitelů této teorie dnes a jedním z jejích zakladatelů v šedesátých letech je G. Chaitin, tehdy ještě pouhý student.

Položme si otázku, co je to vlastně náhoda. Kdy můžeme říci, že binární posloupnost čísel 0 a 1 je náhodná? Způsob, jakým byla série cifer získána, by neměl být rozhodující. Pak by totiž kupř. posloupnosti 1111111111111111111111111 a 1101010010101110100101110 byly obě stejně náhodné; obě mohou se stejnou pravděpodobností být získány opakovaným házením mincí. Dobrá definice je však musí odlišit, musí vycházet ze struktury řady samé.

Má-li posloupnost vnitřní pravidelnost, existuje počítačový program, který sérii cifer vypočítá a vytiskne. Je účelné zavést tzv. algoritmickou složitost (neboli informační obsah) K_N dané posloupnosti jako délku, vyjádřenou v bitech, minimálního programu, který je schopen tuto posloupnost vyprodukovat. Program sám ovšem může být vyjádřen jako binární posloupnost nul a jedniček.

Je-li délka posloupnosti N, bude v našem prvém příkladě takovým programem: Tiskni 1 N krát. Ve druhé (náhodné) sérii bude nejúspornější uložit: Tiskni předloženou řadu (a řadu v programu předepsat). Odhlédneme-li od jistého počtu míst, souvisejících s typem počítače a s nezbytnými technickými náležitostmi, bude délka v prvém případě (pro dostatečně velké N) úměrná $\log_2 N$, tj. $K_N \approx \log_2 N$. Tolik bitů totiž potřebujeme k zadání čísla N. Ve druhém případě bude delší a jeho délka bude v podstatě dána délkou rady samé, $K_N \approx N$.

Nelze-li řadu zkrátit, tj. neobsahuje-li vnitřní uspořádanost a pravidlo, platí vždy $K_N \approx N$. Takovou řadu označíme za náhodnou. V teorii algoritmické složitosti je tedy definice náhodnosti přesně zformulována. Je snad proto trochu překvapující, že o dané posloupnosti nelze obecně dokázat, zeje náhodná. To je fatálním důsledkem Gödelova teorému. (Místo o posloupnostech mluvíme často o číslech. Každé celé kladné číslo má totiž ve dvojkové soustavě takový rozvoj.)

Sepětí Gödelových výsledků s nemožností obecného důkazu náhodnosti lze přiblížit paradoxem Berryho (1908): Najdi nejmenší kladné celé číslo, které může být definováno jedině za použití většího počtu písmen, než je jich obsaženo v této větě. Ten může být vyjádřen také takto: Najdi sérii binárních cifer, o které lze dokázat, že její složitost je větší, než počet bitů tohoto programu.

Jak běžné jsou náhodné posloupnosti? Velká většina všech posloupností (čísel) je určitě náhodných. Uvažme všechny posloupnosti délky N. Těch je celkem 2^N. Řekněme, že o závažné zkrácení se jedná tehdy, když program je kratší o deset cifer. Takto dlouhých programů (tj. binárních posloupností této délky) je však jen $2^{(N-10)}$, tedy $2^{10} \approx 1000$ krát méně. Na všechny původní posloupnosti to rozhodně nestačí. Programů je k dispozici vždy podstatně méně než posloupností, které by měly vytvářet.

26 »Náhodná« reálná čísla

Pojem algoritmické složitosti a náhodnosti lze rozšířit i na nekonečné posloupnosti. Za algoritmickou složitost nekonečné posloupnosti lze zavést $K = \lim_{N \to \infty} (K_N / K)$. Je-li $K > 0$, je posloupnost definována jako náhodná. Nekonečná posloupnost však může vyjadřovat reálné číslo (prostřednictvím jeho rozvoje v dvojkové soustavě). Lze tedy hovořit o náhodných a nenáhodných reálných číslech. Z Gödelova teorému vyplývá, že »skoro všechna« reálná čísla jsou náhodná. Nenáhodná čísla jsou výjimečná, patří mezi ně však všechna čísla racionální (tj. zlomky), ale i odmocniny (kupř. $\sqrt{2}$) mohou být počítána atd. Náhodná nejsou ani další iracionální čísla, kupř. π, e ap. Tato čísla mohou být počítána.

Skutečnost, že »skoro všechna« reálná čísla jsou ve smyslu teorie algoritmické složitosti náhodná a nemohou být vlastně definována, se zdá být hodně zneklidňující. Vždyť právě reálná čísla jsou tím základním matematickým prostředkem, kterého fyzika a přírodověda používají. Všude ve fyzice, dokonce včetně kvantové teorie, se běžně používá spojitých proměnných veličin.

V této souvislosti J. Ford (»zvěstovatel chaosu«, jak sám sebe rád označuje) lamentuje: Reálné číslo obsahuje nekonečnou informaci a je tedy člověku nedostupné. Reálná čísla nejsou pro lidi. Většina reálných čísel nemůže být definována žádným souborem konečného počtu slov. Kontinuum je dobře definovaným souborem elementů, jenž nemohou být dobře definovány. atd.

Z toho nevyplývá, že bychom měli situaci zas až tak dramatizovat a prohlásit, že kontinuum, Newtonovy rovnice a celý matematický aparát fyziky není k ničemu. Souvislosti determinismu a náhodnosti projevující se v teorii deterministického chaosu a jejich sepětí s jinými základními problémy vědecké metodologie nám však mají být varováním a výzvou. Výzvou k hledání dalších souvislostí a k pokusům nově přeformulovat paradigma přírodní vědy.

Nevyhnutelná neúplnost a omezenost každého formalizovaného systému ukazují, že prostředky lidského intelektu jsou bohatší než tyto systémy. Je odtud zřejmé, že lidská mysl je složitější a subtilnější než neživé stroje, které dnes umíme dobře popsat a konstruovat.

Teorie deterministického chaosu a pronikání jejích metod teoretických i experimentálních do mnoha oblastí vědy je významnou součástí hledání tohoto nového pohledu a přístupu.

27 Nové oblasti zájmu přírodovědy a hledání nového paradigmatu

Závěrem jen heslovitě naznačme vybrané směry, kterými se fyzika a přírodověda ubírají a připomeňme některé problémy, které usilují řešit, aby výzvu k tomuto novému pohledu, k vytvoření nové přírodovědy naplnily.

Dosavadní fyzika se tradičně zabývala především vlastnostmi základních stavebních kamenů vesmíru (částicemi a odpovídajícími poli), jejich interakcemi a víceméně statickými strukturami, které vytvářejí (kupř. strukturu pevné fáze atp.). Dosáhla pronikavých výsledků ve studiu velmi velkého (konstruuje dokonce modely vesmíru jako celku) i velmi malého (studuje strukturu subnukleárních částic). Její metody vyrostly podstatnou měrou z klasické mechaniky a její dynamika zůstávala tradičně laplaceovská.

Nyní však usiluje přispět svým dílem i ke studiu velmi složitého, komplexního a ke studiu dynamiky vytváření struktur a vývoje vůbec. Chce být i vědou »historickou«.

Tradiční »vývoj«, který fyzika znal, byl dán disipací energie a cestou k rovnováze tak, jak ji popisuje druhá věta termodynamiky. K pochopení rozporu mezi časovou vratností exaktně přesných dynamických zákonů pohybu jednotlivých mikročástic a nevratností makroskopického popisu (tj. popisu uskutečněného s omezenou přesností), se zdá přispívat teorie deterministického chaosu. Tzv. synergetika, mezioborová disciplína, usilující o popsání právě takových kooperativních jevů, někdy ve svém širším pojetí chápe deterministický chaos jako svoji součást.

Při pozorování složitě fungujícího světa kolem nás se sotva ubráníme dojmu, že je v něm mnoho pravidelného, předvídatelného, ale také mnoho nepředvídatelného, chaotického. V přesných termínech o tom vypovídá právě teorie deterministického chaosu. Chaos je důsledkem nelineárnosti interakcí, je všudypřítomný a neodstranitelný. Chaos je i výrazně tvořivý, umožňuje výběr variant, rychlé přizpůsobení se ap. Chaos je základem statistických zákonů, z chaosu se vynořují druhotné struktury, vedoucí k hierarchické členitosti přírody.

K chápání a modelování dějů na rozhraní mezí řádem a chaosem podstatnou měrou přispívají počítačové metody. Různé simulace umožňují napodobovat základní funkce živých organismů. Počítačové přístupy využívají metod neuronových sítí, buňkových automatů, napodobují procesy adaptace, učení se atp. I zde se široce uplatňují pojmy dynamického chaosu.

V biologickém modelování, ve studiu životních pochodů v organismech, v popisu chování se společenstev živých organismů ap. se běžně vyskytují pojmy jako chaotický atraktor, bifurkace atp.

Pojem entropie zavedla fyzika při studiu tepelných dějů, v termodynamice a ve statistické fyzice. Entropii jako míru neuspořádanosti a neurčitosti znovu ve svých úlohách střetla teorie informace. Porozumět souvislostem není snadné, obsahují kupř. i pojem algoritmické složitosti. Jisté však je, že pojem informace je i fyzikálním pojmem. Za informaci se platí energií. Fyzika, jako věda o tocích hybnosti a energie, a vědy kognitivní, popisující toky informace, se setkávají, aby spolu úplněji a lépe popisovaly přírodní dění.

Velmi závažné problémy leží na rozhraní mezi klasickou a kvantovou fyzikou. Pojmy, které jsou pro klasickou fyziku důležité a pro teorii deterministického chaosu klíčové (bod ve fázovém prostoru, trajektorie stavu ap.), jsou kvantové fyzice cizí. Ta zpochybňuje jejich smysl. Naopak ale, klasické makroskopické pojmy jsou od kvantové fyziky neodmyslitelné. Jsou nezbytné pro samu formulaci kvantových úloh, pro popis výsledků měření atd. Problémy interpretace kvantové fyziky (povaha existence mikroobjektů, proces měření, nelokálnost kvantového systému, role pojmu informace, úloha vědomí a subjektu, provádějícího popis, atd.) jsou v mnohém stále otevřené. Tradičně se věří, že klasický popis je limitou popisu kvantového pro případ nepodstatnosti kvantových jevů, tj. pro případ zanedbatelného vlivu Planckovy konstanty, $h \to 0$. To je obsahem tzv. principu korespondence (mezi klasickou a kvantovou fyzikou).

Zde, na této hranici, deterministický chaos klade kvantové teorii nepříjemné otázky a princip korespondence nevyhlíží dosti přesvědčivě a jednoduše. Je však možné očekávat, že proniknutí do »kvantové chaologie« přispěje k lepšímu porozumění i jiným otázkám vztahu klasického a kvantového popisu jevů. V kvantové fyzice nepochybně leží hluboké a obtížné problémy, s filozofickými souvislostmi dalekého dosahu.

To nejzávažnější na konec. Zdá se nám, že Gödelovy výsledky z matematické logiky obsahují provázané výpovědi o dvou velice závažných vztazích: o vztahu konečného a nekonečného a o vztahu uvnitř a vně, výpověď věty o sobě samé. (Rozpakujeme se napsat výpověď subjektu o sobě samém.)

Konečný logický systém může zformulovat nekonečnou aritmetiku (v níž je však sám obsažen), nemůže však rozhodnout o všech jejích pravdách. Konečný formální systém může překročit sebe sama jen za cenu »vyvolání duchů« v podobě otázek bez odpovědi, v podobě existence sice pravdivých, avšak nedokazatelných tvrzení. (Nekonečna obvyklé teorie množin, kterých je až »neesteticky« mnoho, nechme stranou.)

To není pesimismus. To je cesta poznání. Po rozšíření systému axiomů (ovšem tak, aby nové axiomy nebyly ve sporu s předchozími!) můžeme dokázat i dříve

nedokazatelné věty a rozhodnout o tom, o čem dříve rozhodnout nebylo možno. Objeví se však nová nedokazatelná tvrzení, vyvstanou nové otázky.

Převedení zmíněných výsledku do teorie počítání a zejména do teorie deterministického chaosu, znamená jejich včlenění do přírodní vědy. Uznání existence náhodností a nepředpověditelných výsledků v naprosto striktně deterministické teorii (s nekonečnou vnitřní přesností) je výrazným příspěvkem k vytváření budoucí tváře přírodovědy. Tento přínos leží nejen v úrovni obecně metodologické, ale i zcela praktické. Umožňuje kvalitativně i kvantitativně studovat vztahy uspořádaného a chaotického pohybu v přírodě, včetně procesů samoorganizace a vývoje.

Můžeme očekávat, že v nové přírodovědě bude více místa pro člověka. Deterministická přírodověda byla spíše pohledem zvnějšku, pohledem vyšší bytosti, která může vědět vše a to s absolutní jistotou. V novém schématu je více pamatováno na člověka s jeho omezeností a věčnými otázkami.

Ke zhodnocení a rozvinutí všech podnětů a směrů, které se v souvislosti s teorií deterministického chaosu objevují a o kterých jsme se v této kapitole zmiňovali, je však ještě dost daleko. Mnoho práce zbývá vykonat a mnoha dobrodružstvími bude nutno projít, než se tvář nového paradigmatu vědy zcela projasní.

Stať je kapitolou ze skripta Adamová, Dudák, Jelen a kol.: Kapitoly z filozofie vědy, Vydavatelství ČVUT, 1993