GÖDELŮV ODKAZ V MATEMATICKÉ LOGICE A JEHO MOŽNÉ SOUVISLOSTI VE FYZICE

GÖDEL'S LEGACY IN MATHEMATICAL LOGIC AND ITS POSSIBLE CONNECTIONS IN PHYSICS

J. Jelen
Katedra fyziky FEL ČVUT, 166 27 Praha 6, ČR

ABSTRAKT. Příspěvek se zabývá Gödelovou větou o neúplnosti a jejími důsledky pro matematiku a počítání a možnými souvislostmi ve fyzice a v racionálním poznání.

ABSTRACT. The contribution deals with the Gödel's incompleteness theorem and its consequences in mathematics and computation and also with possible connections in physics and in rational understanding of the world.

Klíčová slova: neúplnost, nerozhodnutelnost, Gödel, fyzika

1. ÚVOD

V poznávání přírody došlo ve 20. století ke třem, pro fyziku velice závažným krizím a přelomům, které vedly k podstatnému prohloubení našich znalostí a našeho pohledu na přírodní dění. Dvě z nich jsou všem fyzikům dobře známy a týkají se chápání prostoročasových vztahů (teorie relativity) a jevů na úrovni mikrosvěta (kvantová teorie). Tyto dvě velké teorie tvoří jádro fyziky naší doby. Třetí krize a z ní plynoucí poučení se týkají především matematiky, matematické logiky a matematické informatiky.

Mají vůbec těmto otázkám fyzikové věnovat pozornost? Fyzika má přece stále co dělat s vlastními otevřenými otázkami. Kupř. právě se sloučením obecné relativity s kvantovými jevy, s interpretací kvantové teorie a se sjednocováním různých typů fyzikálních interakcí, tedy s "teorií všeho".

Myslím, že fyzikové mají a musejí načerpat poučení i z této třetí krize a ze změny povahy matematiky, k níž tato krize vedla.

Matematika je přece jazykem a způsobem vyjadřování fyzikálních teorií a v širším kontextu je tak součástí úsilí o fyzikální popis přírodního dění. Před mnoha léty jsem kdesi viděl fotografii, na níž byl J.A. Wheeler při jakési přednášce a za ním byla na tabuli napsána věta: "Gödelův teorém je příliš závažný, než aby byl ponechán pouze matematikům".

2. MATEMATIKA

Když matematika začala vedle potenciálního nekonečna (tj. neomezeně pokračujících limitních procesů, které jsou běžné v matematické analýze) pracovat i s nekonečnem aktuálním (nekonečnými množinami), ukázala se potřeba nespoléhat se toliko na intuitivně založené přístupy (známý Russellův paradox vede ke sporu). Bezpečnost před nežádoucím a neuvědomělým zanášením vedlejších předpokladů a představ měly zajistit axiomatické formální systémy. V nich se zachází s abecedou symbolů (pro logické operace, proměnné, určité konstanty ap.) a jejich posloupnostmi tvořenými podle určité gramatiky (formulemi), přidají se jisté formule jako axiomy dané teorie a podle logických vyvozovacích pravidel se z axiomů (přijatých za pravdivé) odvozují další pravdivá tvrzení tohoto systému. Důkaz daného tvrzení je uskutečněn tehdy, je-li podle daných pravidel vytvořena posloupnost vycházející z axiomů a končící tímto tvrzením. Postup je čistě mechanický (výpočetní), bez vnášení představ zvenčí.

Již roku 1889 vytvořil takový axiomatický systém (obsahující sčítání, násobení a indukční schema) pro aritmetiku přirozených čísel G. Peano. Poté byly axiomatizovány i jiné části matematiky a byla axiomatizována i teorie množin, která se měla stát základem pro vybudování celé matematiky. Předním stoupencem tohoto čistě formálního přístupu, v němž veškeré pravdy matematiky mohou být vyvozovány a ověřovány mechanickým počítáním, byl D. Hilbert.

Tento slibný program náhle svými výsledky zastavil mladý vídeňský matematický logik, původem z Brna, K. Gödel [1]. Ve svých 25 letech (r. 1930) ukázal (v tzv. "2. větě o neúplnosti"), že každý formální axiomatický systém, pokud je "dostatečně bohatý", aby v něm bylo možno zformulovat alespoň aritmetiku přirozených čísel, je nevyhnutelně neúplný! Existují v něm tvrzení, která jsou v něm nerozhodnutelná! Nelze je dokázat ani vyvrátit. Doplněním vhodných axiomů lze systém rozšířit a tvrzení rozhodnout; v novém systému se však opět objeví nerozhodnutelná tvrzení. Toto zjištění znamenalo šok.

Gödelův důkaz je založen na skutečnosti, že finitní prostředky formálního systému lze zakódovat v aritmetice samé! Poté lze ukázat, že zakódovaná věta "Toto tvrzení je nedokazatelné" je v aritmetice vyjádřena nerozhodnutelným tvrzením o přirozených číslech. Původní Gödelův důkaz je dosti nesnadný a vyžaduje pečlivé sledování jednotlivých kroků [2].

Právě možnost vytvoření tzv. Gödelova čísla pro každý symbol, každé tvrzení i každý důkaz, a tím i zakódování formálního systému i metamatematiky s ním spojené, v aritmetice samé, je geniálním Gödelovým počinem, který byl v [3] dokonce označen za možná největší individuální intelektuální výkon dosažený ve 20. století. Konkrétní číselné zakódování prostředků daného formálního systému lze však provést mnoha různými vhodnými způsoby, nejen Gödelovými mocninami prvočísel. Jiným Gödelovým výsledkem je kupř. i poznání: “Je-li teorie T bezesporná, nelze v ní tuto bezespornost dokázat”. To vede k tomu, že nelze dokázat ani bezespornost aritmetiky (je-li bezesporná). Aritmetika bez násobení je však bezesporná, rozhodnutelná a úplná.

V důkazu použitá věta: ”Toto tvrzení je nedokazatelné” je nutně pravdivá, jinak bychom dostali spor. Znamená to tedy, že pravdivost a dokazatelnost nějakého tvrzení není totéž. Ne každé pravdivé tvrzení je dokazatelné. Jinými výsledky následující doby byla např. Tarského věta o formální nedefinovatelnosti pravdy, Churchův závěr o nerozhodnutelnosti predikátového počtu (tj. ani tautologie nelze mechanicky rozeznávat) ad. V matematice jsou tyto otázky vyjádřeny v pojmech rekurzivních a rekurzivně spočetných (vyčíslitelných) množin. O podrobnosti a přesnost vyjadřování nebudeme usilovat. Ostatně i v předchozích tvrzeních by některá upřesnění byla žádoucí (o tzv. ω-bezespornosti ap.).

Gödelův teorém však neumožňuje nerozhodnutelné věty účinně vyhledávat. Velice srozumitelně formulovanou úlohou, která již od r. 1742 odolává dokázání či vyvrácení protipříkladem, je tzv. Goldbachova hypotéza, říkající, že každé sudé číslo se dá nejméně jedním způsobem napsat jako součet dvou prvočísel (kupř. 20 = 13 + 7, 22 = 17 + 5 atd.). Je snad tato tak jednoduchá věta z obvyklých axiomů aritmeticky nerozhodnutelná?

Jak je patrno, matematika nemůže zaručit vždy určitost, jistotu a rozhodnutelnost (jak bychom při tradiční úctě k ní očekávali). Řada nerozhodnutelných otázek se objevuje i v té části teorie čísel, která se zabývá diofantickými rovnicemi, v nichž se hledají celočíselná řešení algebraických rovnic. Jak by si mohla matematika činit nároky na plné jistoty jinde, když má své nerozhodnutelnosti už v elementární teorii čísel?

3. TEORIE POČÍTÁNÍ

Jak se tyto nerozhodnutelné problémy projevují vně matematiky? Mnoho přímých souvislostí lze ovšem nalézt v teorii počítání. Churchova-Turingova teze o ekvivalenci rekurzivnosti a efektivní vypočitatelnosti tyto vztahy zprostředkovává. Často jsou pojmy mechanický, algoritmický, vypočítatelný a rekurzivní brány jako synonyma.

Dnes je známa celá řada důkazů Gödelova teorému vedených snazší a názornější cestou, právě přes algoritmické výpočetní postupy. Všechny jsou však založeny, stejně jako důkaz Gödelův, na vhodném paradoxu (lháře, holiče ap.) a na příslušné modifikaci známého Cantorova diagonálního schematu, jímž se dokazuje nespočetnost množiny všech reálných čísel. Všechna reálná čísla, vyjádřená jako nekonečné posloupnosti cifer 0 a 1 (ve dvojkové soustavě) nebo cifer 0 až 9 (v desítkové soustavě), nelze očíslovat přirozenými čísly a seřadit je. Kardinální číslo (mohutnost, početnost) množiny reálných čísel (kontinua) je větší, než mohutnost množiny čísel přirozených, $\aleph > \aleph_0$.

Nejznámější podobou Gödelova teorému v teorii počítání je řešení tzv. halting problému. Říká, že neexistuje algoritmus, který by obecně rozlišoval, zda se počítač pracující podle nějakého algoritmu při určitém vstupu zastaví v konečném čase či nikoli (Turing). Jiná vyjádření mohou mít provokativnější podobu: “Nelze obecně výpočetně predikovat budoucnost” nebo “Lze sestavit zařízení, které udělá cokoli, co lze udělat, avšak nelze sestavit zařízení, které by vám řeklo, zda to udělat lze.” Pro úvahy o obecných otázkách vypočitatelnosti A. Turing vymyslel tzv. univerzální počítač, který je vlastně konečným automatem s neomezenou vnější pamětí. Turingův počítač v principu dokáže cokoli, čeho je schopen jakýkoli konkrétní jiný počítač.

Velmi plodným pojmem v těchto souvislostech je tzv. algoritmický informační obsah daného objektu (kupř. konečné či nekonečné posloupnosti nul a jedniček). Je dán délkou minimálního programu (vyjádřenou v bitech), který dokáže tento objekt popsat či generovat. Posloupnost je náhodná, tj. nemá teorii, nelze-li ji zkrátit. Zmíněný pojem je vhodným prostředkem k vyjádření složitosti (komplexnosti) objektu či stavu. Souvislost s Gödelovým teorémem spočívá kupř. v tom, že u dané posloupnosti nelze obecně algoritmicky rozhodnout, zda je náhodná (tj. nezkratitelná) či nikoli.

4. FYZIKA

Lze však najít nějaké uplatnění předchozích výsledků také ve fyzice? Myslím, že ano. Kupř. právě zmíněný algoritmický informační obsah byl využit k rozšíření pojmu entropie z makroskopického i na mikroskopický stav systému. Algoritmický informační obsah nachází uplatnění i v úvahách analyzujících činnost tzv. Maxwellova démona, v nichž je démon zobecněn do podoby zařízení na zpracování informace (tedy počítače).

Teorie deterministického chaosu pracuje s plně deterministickými systémy. Dynamika je popsána zcela jednoznačně diferenciálními rovnicemi pracujícími s reálnými čísly. A přesto, při konečné přesnosti měření, nemůže u chaotického systému poskytovat dlouhodobé předpovědi jeho chování. Jednou ze zcela konkrétních otázek je porovnání chaosu hodnoceného kladnými Ljapunovovými exponenty s algoritmickým informačním obsahem diskrétně vzorkované typické trajektorie. V deterministickém chaosu jde vlastně o střetnutí se kontinua, tj. diferenciálních rovnic a počátečních podmínek, vyjádřených reálnými čísly, a finitních možností jakýchkoli měření. Chaotickou trajektorii získat výpočtem vůbec nelze, v libovolné blízkosti vypočtené trajektorie se však může nacházet opravdu chaotická trajektorie, začínající z odlišných počátečních podmínek (tzv. ”stínové lema”).

Ve smyslu teorie algoritmické nahodilosti je téměř každé reálné číslo ”nahodilé”; posloupnost cifer, která je vyjadřuje, nemůže být zkrácena. Takové číslo nese nekonečnou informaci, nemůže být získáno měřením; nelze je vlastně ani definovat. A přesto je reálné číslo ve fyzice doma, totiž všude v prostředích matematické analýzy.

Kontinuum je velice zajímavý a možná i problematický objekt, rozhodně hodný pozornosti fyziků. V teorii množin přední matematici celá léta věnovali úsilí k potvrzení tzv. hypotézy kontinua. Cantor vyslovil domněnku, že mezi kardinálními čísly $\aleph_0$ (mohutností množiny přirozených čísel) a $\aleph$ (mohutností kontinua, tj. množiny všech reálných čísel) se již žádné kardinální číslo nemůže nacházet, tzn. že jakákoli množina reálných čísel je buď konečná, spočetná nebo má mohutnost kontinua. Tak dlouho se matematici snažili hypotézu dokázat, až naopak dokázali, že je na ostatních axiomech obvyklé teorie množin nezávislá a že ji lze bezesporně buď přijmout nebo přijmout její negaci.

Dlouho zvažovaným axiomem je také tzv. axiom výběru, říkající, že u každého disjunktního systému neprázdných množin lze vybrat po jednom prvku z každé množiny a vytvořit tak množinu vzorků. U konečných množin je to samozřejmé, u nekonečných množin je někdy tento axiom velice užitečný a plodný a umožňuje četné důkazy, někdy však vede k podivným neintuitivním závěrům. Dává kupř. tzv. Tarskiho paradox: Kouli lze rozdělit na několik částí a z nich poté složit dvě koule stejně velké jako byla koule původní. I tento axiom je nezávislý na axiomech standardní teorie množin a také na hypotéze kontinua.

Později přibyl v diskusích tzv. axiom determinovanosti, tvrdící, že každá nekonečná hra na přirozených číslech je determinována, tj. má vyhrávající strategii. Z tohoto axiomu lze hypotézu kontinua dokázat, axiom výběru je však s ním neslučitelný. V poslední době přibývá celá hierarchická škála různě silných axiomů tzv. velkých kardinálů (nazývaných kupř.: inaccessible, indescribable, measurable, strong, superstrong, extendible, huge atp.). Ty umožňují rozhodnout některá jinak nerozhodnutelná tvrzení. Jak je to doopravdy? Které axiomy je třeba přijmout a které nikoli? Názornost ve světě nekonečných množin (tak rozmanitých mohutností) sotva můžeme očekávat. Je třeba posuzovat důsledky ke kterým vedou, jak jsou plodné a užitečné při popisu reálného světa. Matematika se tak připodobnila fyzice a přírodním vědám. Nejsou některé otázky matematiky také záležitostí fyziků? (Vzpomeňme i neeuklidovské geometrie.)

Někdy je kladena otázka: "Je svět veliký počítač?" Každý počítač je jistě fyzikálním zařízením. Počítání není jen intelektuální výkon, ale také fyzikální přírodní proces, v němž toky informace jsou vázány na toky fyzikálních veličin (energie …). Pojem informace je také, a možná i především, pojmem fyzikálním [4]. Lze však o celém vesmíru říci, že jeho časový vývoj je vlastně počítáním? Dá se fyzika vtěsnat do otázek typu ano-ne? Je každý fyzikální zákon počitatelný? Nejspíš nikoli. Jde asi o to, co ještě rozumíme fyzikou.

Někteří autoři, trochu vágně, prostě srovnávají indeterminismus z kvantového světa, v němž výsledek experimentu je zcela určitý, avšak nemůže být z teorie jednoznačně předpovězen, s Gödelovou nerozhodnutelností. V konkrétní podobě to ovšem představuje velice nesnadnou úlohu zabudovat výsledky matematické logiky do kvantové teorie (s její superpozicí stavů, nelokálností, provázaností, apriorními pravděpodobnostmi, procesem měření, kvantovým zpracováním informace atp. [5]), jejíž obecně přijatá filozofická interpretace je stále (i po více než 70 letech) otevřeným problémem.

V tomto místě je plná příležitost i pro vizi R.Penrose o nové fyzice, obsahující kvantovou relativistickou gravitaci a umožňující obsáhnout i problém vědomí. Tento příspěvek, vyzývající fyziky k většímu zájmu o základy matematiky a o Gödelovy výsledky v matematické logice, byl přihlášen na konferenci ještě před vydáním českého překladu Penrosovy knihy Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl [6], založené na jeho předchozích knihách a diskusích. Penrose je rozhodným stoupencem nevypočitatelného charakteru lidské mysli, přičemž i lidskou mysl chce uchopit fyzikálními prostředky. Je tedy i stoupencem představ, že fyzikální jevy obecně vypočitatelné nejsou. Do nové, obsažnější fyziky je ochoten vložit (v souladu s Whiteheadem) i jisté elementy primitivního vědomí a připustit tak i jejich ontologický statut. Vedlo by to k určitému "zduchovění" přírodní vědy?

5. PŘÍRODOVĚDA A TROCHU FILOSOFIE

Na obecně přírodovědné úrovni lze konstatovat, že formální výpočetní přístupy nemohou celou přírodovědu obsáhnout; nemohou jistě obsáhnout možnosti lidské mysli. Navzdory tomu, že žádná axiomatika nemůže plně uchopit aritmetiku přirozených čísel, každý školák ze zkušenosti chápe jejich povahu. Mysl nepracuje algoritmicky, ale spíše dosahuje porozumění vhledem, který nelze na mechanický výpočet redukovat. Gödelův teorém vypovídá o tom, že finitními prostředky žádného formálního systému nelze obsáhnout všechny pravdy světa, ba ani všechny pravdy o nekonečném souboru přirozených čísel.

Nerozhodnutelnosti vznikají nutně tam, kde nejde jen o pohled zvenčí. Standardní fyzika však o takový pohled zvnějšku usiluje. To však není úplně možné, fyzika a celá přírodověda jsou přece samy součástí světa, který chtějí v úplnosti racionálně popsat. To bez nerozhodnutelností patrně není možné. I fyzika je jen popisem zevnitř, je tedy endofyzikou, nikoli exofyzikou, jak by si přála.

Lidská řeč a lidské poznání nerozlišují úrovně a metaúrovně. To odpovídá Gödelovu teorému, v němž je systém popsán v aritmetice a aritmetika sama je jeho součástí. Nerozhodnutelnosti jsou pak nevyhnutelné. Žádná finitní teorie (a lidská řeč má jen finitní prostředky) nemůže dosáhnout úplného popisu světa. Úplný popis by umožňoval i úplnou predikci. Úplná a vyčerpávající předpověď je však v konfliktu s představou a pocitem svobodné vůle. Svobodná vůle by umožňovala vhodným rozhodnutím uskutečnění předpovědi znemožnit. Gödelovy výsledky z matematické logiky nám umožňují tyto (spíše tušené) souvislosti přesněji formulovat a doložit již v nejjednodušších strukturách jakou je např. aritmetika přirozených čísel.

6. ZÁVĚR

Všechny předchozí, nezřetelně a vágně formulované souvislosti mají patrně své fyzikální průměty. Usiluje-li fyzika ve svých nejambicióznějších programech být základem celé přírodovědy a být schopna vytvořit tzv. ”teorii všeho”, pak to nemůže být jen prosté sjednocení všech typů fyzikálních interakcí, ale musí nějakým způsobem zahrnout i poučení vyplývající z oné třetí krize a revoluce, o které je řeč v úvodu. Nesmí ji opravdu ponechat jen matematikům.

Záměrem příspěvku nebylo ovšem nalézt nějaké nové odpovědi, ani formulovat nové a přesné otázky, ba ani podat přehled tématu, ale toliko připomenout jeho existenci a zajímavost.

LITERATURA

1. J. Malina, J. Novotný, Ed., Kurt Gödel, Brno 1996
2. E. Nagel, J. R. Newman, Gödel’s Proof, London 1958
3. D. Ruelle, Change and Chaos, Princeton Univ. Press 1991
4. J. Jelen, 2. konference českých a slovenských fyziků, Ostrava 1996, s.749
5. A. Peres, Quantum Theory, Dordrecht 1993
6. R. Penrose, Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl, MF, Praha 1999