NELINEARITY, DETERMINISTICKÝ CHAOS A KONTINUUM

Josef Jelen *Katedra fyziky, FEL ČVUT,*

166 27 Praha 6 e-mail: jelen@feld.cvut.cz

Abstract

Non-linearities may lead to the phenomenon of deterministic chaos. Its determinism is rooted in real numbers. Axioms for the set theory, which is the base for the theory of real numbers, should be in the field of interest of physicists.

KLÍČOVÁ SLOVA: deterministický chaos, kontinuum, reálné číslo, množina

1 Úvod

Vliv nelinearit na dynamické chování systémů se obvykle projevuje a je studován ve dvou různých směrech. Vliv stavu systému na svůj vlastní vývoj může vést v čase k synenergetickému efektu posílení již dosaženého a tím i k vytvoření makroskopických struktur a jejich evoluce. V jevu deterministického chaosu nelinearity naopak vedou k destrukci regulárního předvídatelného chování a systém se pak chová chaoticky.

2 Deterministický chaos

Deterministický chaos vyrůstá na půdě klasické mechanické fyziky, intenzivní zájem vzbudil ale až před dvaceti lety v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky. I když o záludnostech nelinearit věděl už Poincaré, mysl fyziků téměř na celých sto let plně zaujalo elektromagnetické pole, relativita, gravitace, kvantové efekty, stavba látek a subnukleární částice.
Trochu ironickou (a nepříliš známou) je skutečnost, že digitální počítač chaos produkovat a tedy ani předvádět, vlastně nemůže, počet jeho možných stavů je totiž konečný. Lze však dokázat, že podle tzv. „stínového lematu“ se ale v libovolně malém okolí ($\epsilon > 0$) vypočtené trajektorie nachází skutečná chaotická trajektorie, začínající však z nepatrně odlišných počátečních podmínek, než byla ta, ze které se výpočet začal odvíjet.
Významnou veličinou, kterou můžeme charakterizovat chaotické chování, je tzv. Kolmogorovova entropie, udávající jak rychle systém „zapomíná“ své počáteční podmínky nebo, jinak vyjádřeno, jak rychle je systémem na makroskopické úrovni produkována informace, tj. jak rychle z nepozorované mikroskopické úrovně na pozorovanou, makroskopickou úroveň informace vytéká. Z pohledu rozbíhání se stavových trajektorií jsou rozhodující hodnoty Ljapunovových exponentů. Kladná hodnota alespoň jednoho z nich vede k exponenciálnímu rozbíhání se původně blízkých stavů („motýlí efekt“) a k extrémní citlivosti na počáteční podmínky.
Jiným prostředkem posuzování chaotičnosti (tj. nahodilosti) trajektorie je tzv. algoritmická nahodilost [1]. Algoritmický informační obsah daného objektu (např. řády cifer) je dán nejkratším programem, který je schopen objekt popsat (řadu vypočítat a vytisknout). Nemůže-li být program kratší než posloupnost sama, je posloupnost algoritmicky náhodná. Ze souvislostí

mezi vyhodnocováním algoritmického informačního obsahu a Gödelovými výsledky o neúplnosti formálních systémů vyplývá, že neexistuje obecný program, který by algoritmickou náhodnost rozhodoval.
Sám název deterministického chaosu vyznívá sporně, jedna část názvu jako by popírala část druhou. Není to ale tak. Determinismus je založen na představě o spojitém kontinuu reálných čísel, v nichž se řeší příslušné diferenciální rovnice. Počáteční stav jednoznačně a nekonečně přesně determinuje kterýkoliv stav budoucí. Omezená predikovatelnost je pak dána faktorem, že každé měření je možné jen s konečnou přesností diskrétního intervalu hodnot.
A zde se dostáváme k vlastnímu předmětu tohoto příspěvku, který je souborem či spíše tříští poznámek o matematickém kontinuu a fyzice.

3 Reálná čísla

Není pochyb o tom, že reálné číslo je jedním ze základních stavebních kamenů fyzikální teorie. Matematika je vyjadřovacím jazykem fyziky a reálné číslo, diferenciální rovnice apod. jsou z hlavních pojmů, s nimiž budujeme fyzikální obraz světa. Jeví se jako samozřejmé a nezbytné. Hodnoty fyzikálních veličin jsou dány reálnými čísly. Úspěch je fantastický: klasická i relativistická mechanika, teorie polí, ba i ambiciózní teorie superstrun s reálnými čísly běžně pracují.
Hluboké záludnosti vztahu diskrétního a spojitého si však byli někteří vědomi již v antice, jak dokládá kupř. Zenonova aporie Achilles a želva.
Také Gauss se obával nekonečna: „Protestuji proti použití nekonečných velikostí jako skutečného celku, to není v matematice dovoleno. Nekonečno je jen způsob mluvy…“ Z dalších uveďme Kroneckera: „Celá čísla stvořil bůh, vše ostatní je dílo člověka.“ Atd.
Mnozí matematici byli však nadšeni. Cantor přijal aktuální nekonečno a vybudoval jeho teorii, totiž teorii množin. Ta byla poté formalizována a postavena na axiomatický základ a Hibertova matematická duše si mohla pochvalovat: „Nikdo nás nevykáže z ráje, jejž pro nás Cantor vytvořil.“ Sám se však dočkal hořkého zklamání svých nadějí, když těžce nesl to, jak Gödel ukázal, že jeho program bezproblémové axiomatizace celé matematiky není podle jeho představ vůbec proveditelný. V každém, dostatečně bohatém systému, který je schopen obsáhnout aritmetiku přirozených čísel, budou vždy existovat tvrzení nerozhodnutelná [2].
Při axiomatické výstavbě přirozených a reálných čísel [3] můžeme postupovat různě. Můžeme začít čísly přirozenými a čísly racionálními a přes jejich Dedekindovy řezy nebo přes Bolzánovské - Cauchyovské posloupnosti vybudovat čísla reálná. Lze naopak začít i axiomaticky rovnou s čísly reálnými a čísla přirozená z nich později vydělit jako speciální podmnožinu.
Ani přirozená čísla však axiomaticky nezvládneme k plné spokojenosti. Nikoli vše lze dokázat. A nevíme, co dokázat nelze. Je Goldbachova hypotéza, že „každé sudé číslo je součtem dvou prvočísel“ dokazatelná z obvyklé Peanovy axiomatiky? Kdopak ví.
U reálných čísel, kde potřebujeme sčítání, násobení a uspořádání s existencí suprema shora omezené množiny (tj. Dedekindův princip), je struktura ještě bohatší a rozhodně ne snadno průhledná.
Potřebujeme pojem množiny, pří čemž jsme si však vědomi, že axiomatická teorie množin nemůže dokázat vše, je nutně neúplná. Přirozené očekávání, že mezi mohutností spočetné množiny přirozených čísel alef nula a mohutností nespočetné množiny kontinua C již neleží žádná další mohutnost (tzv. hypotéza kontinua), se ukázalo být na obvyklé základní axiomatice teorie množin podle Zermela a Fraenkela nezávislé. Můžeme hypotézu kontinua přijmout či odmítnout a ke sporu nedojdeme, jen budeme mít různé teorie množin.
Podobně také axiom výběru, říkající, že „z každého disjunktního (obecně ovšem nekonečného) souboru množin můžeme utvořit novou množinu výběrem právě jednoho prvku z každé množiny souboru“. Tento axiom je rovněž nezávislý na ostatních axiomech, ba i na hypotéze kontinua.

V některých důkazech z matematické analýzy je vhodný a dává dobré služby, jinde vede k nepřirozeným důsledkům. Kupř. k tzv. Tarského - Banachovu paradoxu, kdy „rozdělíme kouli na čtyři části, části pootočíme a složením dostaneme kouli o dvojnásobném objemu“ (míra se totiž nezachovává). Axiom výběru je ovšem nekonstruktivní, neříká nám jak výběr provést, konstatuje jen existenci.
Různou konzistentní kombinací vzájemně slučitelných či alternativních axiomů (kupř. axiom determinovanosti, axiomy různě velkých kardinálů atp.) můžeme postupně formulovat odlišné teorie nekonečných množin [4].
Která z nich je však pro fyziku nejvhodnější? Zda je třeba ocenit „fyzikálně přitažlivé“ úsilí P. Vopěnky o vybudování tzv. alternativní teorie množin spjaté s představou horizontu, v níž se vyskytují pouze dvě nekonečna [5].
Vraťme se opět k deterministickému chaosu. Lze snad říci, že právě on nabízí určité „testovací“ prostředky k rozboru potřeb, které na reálná čísla klade fyzika, nebo alespoň její mechanice blízká část.
U disipativního systému přejde chaotická trajektorie posléze k chaotickému (tj. podivnému) atraktoru s neceločíselnou metrickou dimenzí. V každém, i popularizujícím pojednání o chaosu a fraktálech je jako ilustrativní příklad takové množiny zmiňována tzv. Cantorova množina (Cantorovo diskontinuum, Cantorův prach apod.) K. Ta může být konstruována nekonečně krát se opakujícím procesem vyjímání otevřené (!) střední třetiny intervalu. Začneme-li intervalem $< 0, 1 >$ a zapíšeme-li čísla v trojkové soustavě s použitím cifer 0, 1, 2 snadno nahlédneme, že koncové body ponechaných uzavřených (!) intervalů jsou zapsány ciframi 0 a 2. Po dvou krocích kupř. zbudou intervaly $< 0, 1/9 >, < 2/9, 3/9 >, < 6/9, 7/9 >, < 8/9, 1 >$ a jejich koncové body jsou v trojkové soustavě zapsány takto: $0.00\tilde{0}$, $0.00\tilde{2}$, $0.02\tilde{0}$, $0.02\tilde{2}$, $0.20\tilde{0}$, $0.20\tilde{2}$, $0.22\tilde{0}$, $0.22\tilde{2}$.
Pokračujeme-li dále „až do nekonečna“, vždy vystačíme se zápisy pomocí cifer 0 a 2. V každém kroku nám však zůstávají stále se zmenšující uzavřené intervaly s těmito koncovými body. To, co nám zbývá, postupně ubývá a limitní množina K má Lebesgueovu míru nula. Zdá se, že nám „poté co jsme dorazili do nekonečna“ zbyly „nakonec“ právě jen tyto konečné body. Na kterémkoli „trojkovém“ místě mají buď 0 nebo 2. Je jich však spočetně mnoho; sice nekonečně, ale spočetně. Všech posloupností cifer 0 a 2 je však nespočetně mnoho, „právě tolik“ jako všech bodů na původním intervalu $< 0, 1 >$. Vzpomeňme na Cantorův důkaz(diagonálním schématem), že mohutnost kontinua je větší než mohutnost množiny přirozených čísel. Spočetnou procedurou sčítání koncových bodů se ke Cantorově množině dobrat nemůžeme. Svět reálných čísel je touto, byť sebedelší cestou nedosažitelný.
Z pohledu algebraického informačního obsahu je informace uložené „téměř v každém“ reálném čísle nekonečně velká. Reálné číslo je nekonečnou posloupností cifer (kupř. 0 a 1). Taková posloupnost je „náhodná“, nemůže být obecně podle žádného pravidla zkrácena. Reálné číslo nemůže být naměřeno, počítáno, napsáno, ba ani vůbec finitně definováno. „Reálná čísla nejsou pro lidi, jsou pro Pánaboha“ (J. Ford). A proto jsou ve fyzice docela doma a úspěšně se v ní uplatňují.

4 Závěr

Tak jako geometrie není jen záležitostí matematiků, ale geometrie reálného světa je především problém fyzikální, neměli by také fyzikové co říci k volbě nejvýstižnější varianty axiomů teorie množin a k představě o kontinuu?
Co obměnit slova A.Wheelera: „Gödelova věta je příliš závažná, než aby mohla být ponechána jen matematikům“ na: „Problém kontinua reálných čísel je pro fyziku příliš závažný, než aby mohl být ponechán jen matematikům.“
Mohou zde něčím přispět vědecké spekulace podobné Penrosově představě „kvantovém vhledu“

a o nealgoritmické povaze lidské mysli [6]?

5 Literatura

[1] Chaitin, G.J.: Algorithmic information Theory, Cambridge 1987

[2] Nagel, E. Newman, J.R.: Gödel's Proof, London 1958

[3] Bukovský, L: Štruktura reálnej osi, Bratislava 1979

[4] Balcar, B., Štěpánek, P.: Teorie množin, Praha 1986

[5] Vopěnka, P.: Mathematics in the Alternative Set Theory, Leipzig 1979

[6] Penrose, R.: Shadows of the Mind, Oxford 1994