Paradoxy prostoročasu

Josef Jelen, Praha

1. Úvodem

Einstein přispěl do fyziky 20. století v mnoha oblastech. Významné jsou jeho práce ve statistické fyzice a v teorii záření. Za vysvětlení fotoelektrického jevu obdržel Nobelovu cenu. Relativistická teorie gravitace umožňuje porozumět četným astrofyzikálním objektům a jevům (kupř. černým dírám, pulsarům atp.), ba dovoluje modelovat i vývoj vesmíru jako celku. Je proto velmi přitažlivá a populární.

Nejpronikavěji do všední fyziky však vstoupila jeho speciální teorie relativity, analyzující sepětí prostorových a časových vztahů mezi událostmi v jakémkoli přírodním dění. Je přímo jedním z neodmyslitelných základních kamenů celé budovy fyziky naší doby. Základy teorie relativity jsou podávány v úvodních kurzech fyziky na všech přírodovědných a technických vysokých školách. Některé důsledky Lorentzovy transformace, jako kontrakce délek a dilatace času, našly své místo dokonce i ve středoškolských učebnicích. Porozumět smyslu příslušných vztahů a „vzorečků" není však samozřejmé a snadné. Na cestě k hlubšímu pochopení dobře slouží tzv. relativistické paradoxy.

2. Paradoxy

Za paradoxní obvykle považujeme takové situace, kdy jsme překvapeni a zaskočeni, kdy se nám nalezené řešení zdá neslučitelné s tím, co „podle zdravého rozumu" očekáváme. Získané řešení se jeví jako nepřijatelné a vnitřně rozporné. Někdy umíme pro daný problém nalézt dvě řešení, zdánlivě stejně opodstatněná a přijatelná, navzájem si však odporující, a neumíme rozhodnout, kterému z nich máme dát přednost a proč.

Rozbor paradoxu pak zpravidla ukáže, že chybná byla už zdánlivě samozřejmá formulace problému, že byla položena chybná otázka, že je otázka nekorektní nebo alespoň nepřesná. Obvykle je tomu tak proto, že při formulaci bylo cosi přehlédnuto. Byly přijaty předpoklady, zpravidla nevyslovené, vycházející z určité představy, na

---

Doc. RNDr. Josef Jelen, CSc. (1935), katedra fyziky FEL ČVUT, Technická 2, 166 27 Praha 6.

Článek vznikl na základě vystoupení na semináři 14. 3. 1999 věnovaném 120. výročí Einsteinova narození.

Tento příspěvek vznikl s částečnou podporou výzkumného programu č. J04/98:212300017 ČVUT v Praze.

které je formulace otázky pak založena. Tato představa byla však mylná a přijaté předpoklady nejsou splněny.

V případě teorie relativity je tomu tak proto, že naše každodenní zkušenost a z ní vycházející pojmy jsou čerpány ze situací, kdy rychlosti jsou malé ve srovnání s rychlostí světla a relativistické efekty jsou nevýznamné a nepodstatné. Vnitřní sepětí prostorových a časových vztahů proto nemusíme brát obvykle v úvahu a máme pocit, že „prostoru a času odděleně dobře rozumíme“. V relativistických situacích s velkými rychlostmi je pak příležitostí k překvapením a paradoxům více než dost.

O pokořitele teorie relativity a vítěze nad ní nebyla nikdy nouze, kupř. [1], a není o ně nouze ani dnes [2], [3].

Rozbor paradoxů vyžaduje nikoli pouze znalost několika vzorců a formulek, ale i otevřenou mysl, poctivé úsilí a určitou skromnost, kázeň a důslednost v uvažování. Tento přístup se poté bohatě odmění. Paradoxy jsou vynikajícími učiteli a umožňují nám do smyslu a ducha teorie hlouběji proniknout.

Relativistických paradoxů byl předložen od zrození teorie relativity velký počet. Řada z nich je shrnuta kupř. v knize [4], která vyšla také rusky a je u nás snadno dostupná. Omezený rozsah příspěvku umožňuje připomenout paradoxních situací jen několik. Většina paradoxů z tohoto příspěvku je v uvedené knize v nějaké podobě zmíněna.

3. Relativnost současnosti, kontrakce délek a dilatace času

Sepětí prostoru a času vyjadřuje Lorentzova transformace, která pro určitou událost porovnává prostorové a časové souřadnice, vztahující se ke dvěma stejně oprávněným inerciálním vztažným soustavám S a S', pohybujícím se vůči sobě navzájem rychlostí $v < c$.

U čtenářů PMFA můžeme jistě předpokládat, že jsou seznámeni se základy speciální teorie relativity a že kdysi studovali z některé z mnoha dostupných učebnic této teorie, kupř. [5–11]. Zasvěceným se autor omlouvá, pro ostatní je snad vhodné připomenout, že speciální podoba této transformace je dána vztahy

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

Tento tvar odpovídá případu, kdy osy obou soustav S a S' jsou navzájem rovnoběžné, osy x a x' trvale splývají a odečítání času v obou soustavách započalo, když souřadnicové počátky soustav splývaly. Soustava S' se vůči S pohybuje rovnoměrně rychlostí v podél osy x. Známe-li prostorové souřadnice x, y, z a časový údaj t pro jakoukoliv událost U, můžeme podle (1) nalézt odpovídající souřadnice x', y', z' a t' téže události vztažené ke vztažné soustavě S'.

Nejzávažnějším důsledkem této transformace je skutečnost, že prostorové souřadnice a časové údaje jsou neoddělitelně provázány. To vede k překvapivé relativnosti pojmu současnosti. Jsou-li dvě různé události A a B současné vzhledem k soustavě S, tj. platí-li $t_B = t_A$, nikterak z toho nevyplývá i současnost vůči soustavě S'. Obecně může být $t'_B \neq t'_A$. V pozadí většiny paradoxů se právě ukrývá přehlédnutá relativnost současnosti.

Z transformačních vztahů (1) lze snadno vyvodit známé formule pro tzv. kontrakci délek

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2}$$

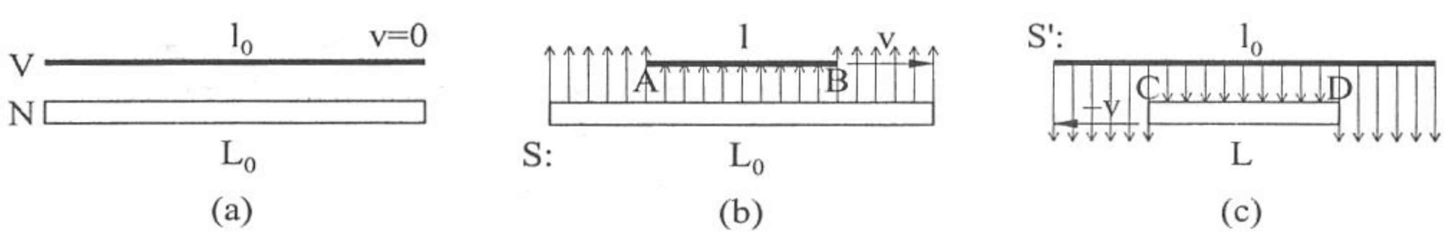
a pro dilataci času

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{3}$$

Délka l ze vztahu (2) představuje rozměr tělesa ve směru podélném ke směru jeho rychlosti, vztažené k nějaké soustavě S, vůči níž se těleso rychlostí v pohybuje, zatímco l_0 je tentýž rozměr, avšak měřený v soustavě S_0, která se pohybuje s tělesem a v níž je tedy těleso v klidu. Je to tzv. klidová délka. Podobně T_0 je časový interval mezi dvěma tiky hodin, nacházejících se v klidu v soustavě S_0, a T je trvání téhož časového intervalu, měřeného však vzhledem k soustavě S, vůči níž se hodiny pohybují rychlostí v. Lze tedy říci, že pohybující se předměty jsou podélně zkráceny a chod pohybujících se hodin se jeví zpomalený.

(To však neznamená, že pohybující se předměty opravdu vidíme prostě zkrácené a zkrácené je také vyfotografujeme! Do oka či objektivu přicházejí v určitém okamžiku paprsky, které byly vyslány z různých míst předmětu v nestejných časech. Každé pozorování proto vyžaduje vyhodnocení a interpretaci! Je jen shodou okolností — vlastně paradoxem, že letící kouli vidíme kulatou [12], [13]. Srovnej též poznámky J. Bičáka v roztomilé Gamowově knize [14]. Těmito „paradoxy naruby“, tím, co doopravdy vidíme, apod., se však již nemůžeme zabývat. Vraťme se proto ke vztahům (1)–(3) a jejich paradoxním důsledkům.)

4. Vlak a nádraží



Obr. 1. Vlak a nádraží.

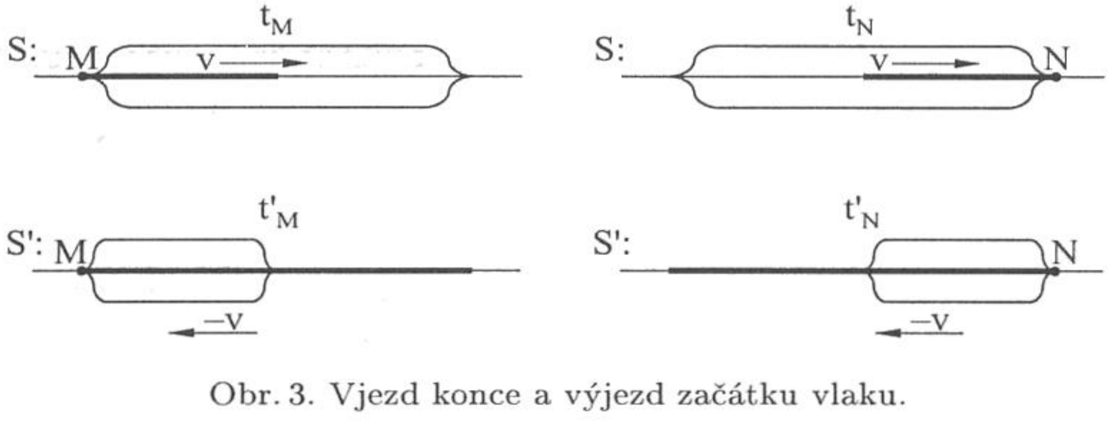
Začněme známým příkladem o nádraží a jedoucím vlaku. Nechť je, podle obr. 1a, klidová délka vlaku l_0 stejná jako délka nádraží L_0. Jede-li vlak rychlostí v zleva doprava podle obr. 1b, je z hlediska vztažné soustavy S, spojené s nádražím, vlak zkrácen na délku $l = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Jeho délku určíme tak, že podél nástupiště máme rozmístěny fotografické kamery (pozorovatele), které současně ($t =$ konst.) zhotoví snímky toho, co je právě před nimi. Na dvou z nich budou (současně) zachyceny začátek a konec vlaku. Tedy $t_A = t_B$, události A a B jsou současné. Délka vlaku pak odpovídá vzdálenosti těchto dvou kamer, $l = x_B - x_A$. Vlak je tedy dlouhý, řekněme, „od bufetu k toaletám", $l < L_0$.

Z hlediska vlaku se však pohybuje nádraží rychlostí $-v$ zprava doleva a na fotografiích zhotovených současně ($t' =$ konst.) ze všech oken vlaku budou na dvou z nich zachyceny začátek a konec nádraží, $t'_C = t'_D$. Délka nádraží pak odpovídá příslušné části vlaku, např. „od 2. k 8. vagonu", $L' < L_0$. Efekt je reciproční. Z hlediska nádraží je zkrácen jedoucí vlak, z hlediska vlaku je zkráceno „jedoucí" nádraží.

Obr. 2. Vlak a kolejiště.

Snad ještě paradoxněji vystupuje tato situace na obr. 2. Nádraží je zde znázorněno vstupním a výstupním rozvětvením kolejí. V obr. 2a, v němž se pohybuje vlak, je celý vlak obsažen v nádraží (tj. je uvnitř nádražního kolejiště), v obr. 2b je zkráceno pohybující se nádraží, začátek vlaku je již vně nádraží, zatímco konec vlaku do nádraží ještě nevstoupil.

Je, či není celý vlak v nějakém okamžiku obsažen celý v nádraží? Z hlediska S ano, z hlediska S' tomu tak nikdy není. Je to však vůbec podstatné? Záludnost situace spočívá v relativnosti pojmu současnosti.



Obr. 3. Vjezd konce a výjezd začátku vlaku.

V obr. 3 jsou znázorněny dvě situace ve dvou různých časech, odpovídajících událostem M (vjezd konce vlaku do nádraží) a N (výjezd jeho začátku z nádraží).

Z hlediska vztažné soustavy S platí $t_M < t_N$, z hlediska soustavy S' je časové pořadí opačné, $t'_M > t'_N$. Tyto dvě vzdálenosti jsou kvazisoučasné, nepřísluší jim jednoznačné časové pořadí. Interval, který obě události ve čtyřrozměrném prostoročasu odděluje, je tzv. prostorupodobný. Takové dvě události nemohou být kauzálně propojeny, jedna druhou nemůže ovlivnit. Jejich prostorová odlehlost (vzdálenost) je v každé inerciální vztažné soustavě větší než dráha světla za časový interval Δt_{NM} mezi oběma událostmi. Snadno lze kupř. ukázat, že v soustavě S opravdu platí

$$(t_N - t_M)c < x_N - x_M, \quad \text{tj.} \quad \Delta t_{NM}\, c < l_0. \tag{4}$$

Pro $t_N - t_M$ z obr. 3 vyplývá

$$\Delta t_{NM} = \frac{l_0 - l}{v} \tag{5}$$

a od očekávané nerovnosti

$$\frac{l_0 - l}{v} c < l_0 \tag{6}$$

můžeme prostými úpravami dospět až po

$$1 - \frac{v}{c} < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{7}$$

Tato nerovnost je pro $0 < v < c$ jistě splněna. Od (7) lze však zpětnými ekvivalentními úpravami dospět až k (6) a k dokazované nerovnosti (4). Události M a N se tedy nemohou kauzálně ovlivňovat. Později se k tomuto paradoxu ještě vrátíme.

5. Tyč a otvor

Známým paradoxem je provokující otázka, zda „rychlý chodec spadne do kanálu". Ve fyzikální podobě bývá formulován jako problém o tom, zda tuhá tyč o klidovém rozměru $l_0 = 1\,\mathrm{m}$, posouvající se rychlostí v podél vodorovné hladké tabule stolu s otvorem $L_0 = 1\,\mathrm{m}$, propadne do otvoru či nikoli (obr. 4).

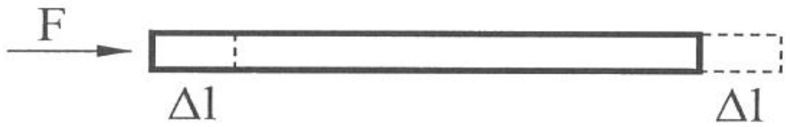
Obr. 4. Tyč a otvor.

Z hlediska vztažné soustavy S, v níž je tyč zkrácena na $l = l_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, lze odpovědět, že tyč do otvoru jistě spadne. Z hlediska vztažné soustavy S', pohybující se horizontálně rychlostí v, tj. pohybující se nejprve spolu s tyčí, je ovšem zmenšen otvor, takže přední konec tyče přejde za otvor dříve, než zadní konec nad otvor vstoupí. Zdá se tedy, že by tyč do otvoru spadnout neměla. Propadne, či nikoli? Odpověď musí být samozřejmě jediná a táž z hlediska obou vztažných soustav.

Úloha bývá modifikována či upřesňována do mnoha ne vždy zcela ekvivalentních verzí. Abychom se vyhnuli vlivu gravitace, lze využít sílu magnetickou nebo jinou.

Lze také ve vhodném okamžiku ťuknout na oba konce tyče a tyči tak udělit okamžitý impuls svislým směrem. Současné ťuknutí z hlediska S není současné z hlediska S'. Ťuknuto je nejprve na přední a teprve poté na zadní konec tyče, takže tyč je úderem nakloněna. Pouze jedno ťuknutí „právě uprostřed" také nepomůže. Střed (střední událost, ležící uprostřed mezi dvěma jinými událostmi) není invariantní; střed vůči S není středem vůči S' atd. Podrobné řešení jedné varianty této úlohy je popsáno J. Bičákem v článku [15].

Řešení paradoxu spočívá v uznání faktu, že představa tuhé tyče je relativisticky nepřijatelná. Tuhé tyče v relativitě neexistují. Tuhá tyč by umožňovala přenos signálu nekonečnou rychlostí (obr. 5).



Obr. 5. Tuhá tyč.

Posunutí levého konce o Δl znamená současné posunutí i pravého konce o tutéž vzdálenost. Přenos signálu je okamžitý. V teorii relativity je však přípustný jen signál (kupř. pružná vlna) nepřevyšující rychlost světla. Přední konec tyče z naší úlohy se tedy po vstupu za hranu otvoru poněkud ohne podle obr. 6 a ohnutá tyč může otvorem projít i z hlediska soustavy S'.

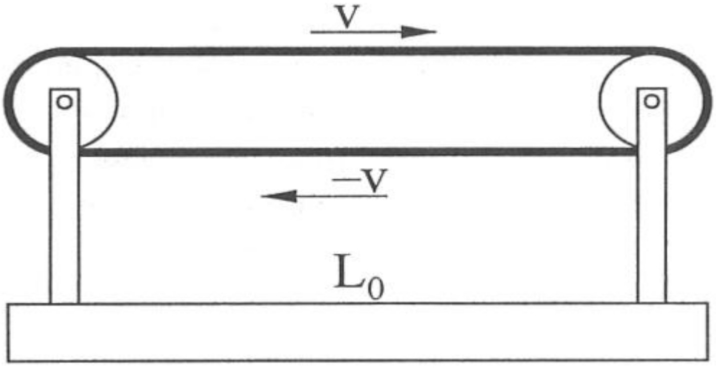
Obr. 6. Tyč se provlékne.

Uvádět různé formulace paradoxu tyče a usilovat o analýzu odpovídajících řešení není v omezeném a pouze informativním příspěvku dobře možné. Četné zdánlivě paradoxní situace založené na kontrakci délek lze nalézt v [4].

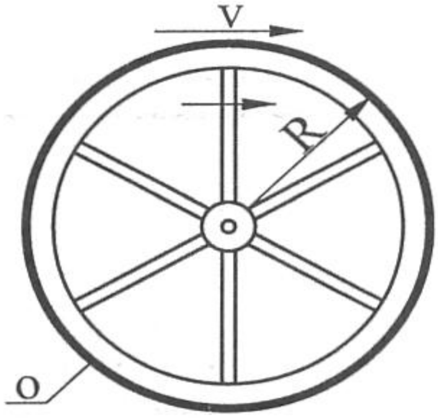
6. Paradox transportéru, roztočené kolo a jiné paradoxy

V obr. 7 je znázorněn rychle se pohybující pás transportéru. Je-li transportér dostatečně dlouhý, lze připustit, že vliv obou konců lze v naší úvaze přehlédnout (jejich vliv zůstává týž i při zvětšující se hodnotě délky L_0).

Nechť délka pásu je v klidu právě potřebně velká $2l_0 = 2L_0 + 2\pi R_0 \approx 2L_0$. Nabízí se však otázka: Jak je to s délkou pásu při velké rychlosti v? Horní i dolní část pásu se vůči klidové soustavě S, spjaté s rámem transportéru, v důsledku pohybu zkracují (na směru rychlosti nezáleží), takže délka pásu by již neměla dostačovat. Musíme připustit, že k tomu, aby délka pásu stačila i za pohybu, musí být pás napjat. „Tuhý" pás by se pohybem transportéru musel přetrhnout.



Obr. 7. Transportér.

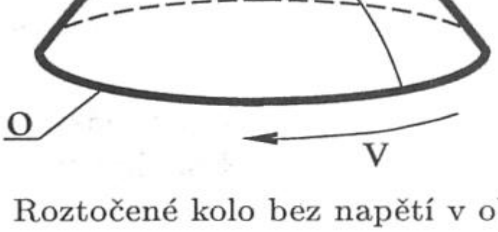


Obr. 8. Roztočené kolo.

Podobně je tomu s roztočeným kolem podle obr. 8. Pro délku obvodu kola v klidu platí

$$O_0 = 2\pi R_0.$$

Při měření obvodu kola z hlediska klidné vztažné soustavy S je měření každé části obvodu měřením podél rychlosti této části vůči S, takže obvod by měl být zkrácen. Měření loukotí je měřením napříč směru pohybu, takže poloměr kola ovlivněn není, $R = R_0$. Platí vůbec $O = 2\pi R$, pokud se kolo točí?



Obr. 9. Roztočené kolo bez napětí v obvodu.

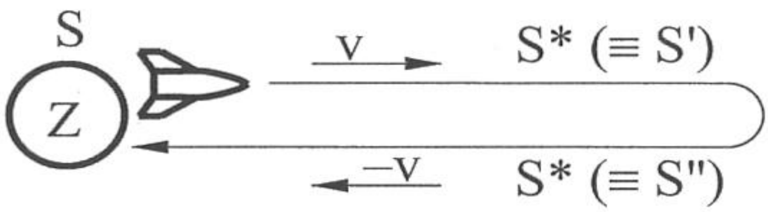
Řešením je opět poznání, že obvod kola je napjat. Tuhá tělesa neexistují. Kdyby úloha přestala být úlohou rovinnou a kolo by mohlo napětí uvolnit, dostali bychom tvar podle obr. 9. Pak by opravdu neplatilo $O = 2\pi R$ a geometrie by nebyla euklidovská. Soustava S^*, spjatá s kolem, není ovšem inerciální a bližší analýza by nás opět přivedla k potřebě neeuklidovské geometrie.

Existuje i celá řada dalších paradoxů, v nichž vystupuje pojem síly. Překvapení a pocit paradoxu je v nich obvykle založen na tom, že zrychlení nemá obecně směr působící síly. Rovnováha v jedné inerciální soustavě není rovnováhou v soustavě jiné. Do úvah srovnávajících děje z pohledu různých inerciálních systémů vstupují toky energie, hybnosti a momentu hybnosti.

Početné jsou i paradoxy elektrodynamické. Nenabitý vodič protékaný proudem se v jiné soustavě jeví elektricky nabitý. Navzájem se totiž transformují a spolu „mixují" elektrické a magnetické pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a hustota elektrického náboje ϱ a hustota proudu $\boldsymbol{j}$. Atd. To bychom však již příliš vybočili z rámce paradoxů zahrnujících toliko vztahy prostorové a časové. (I když, důsledně vzato, všechny relativistické paradoxy jsou vlastně paradoxy prostoročasové povahy.)

7. Paradox dvojčat

Snad nejznámějším a nejobsáhleji rozebíraným prostoročasovým paradoxem je tzv. paradox dvojčat (obr. 10).

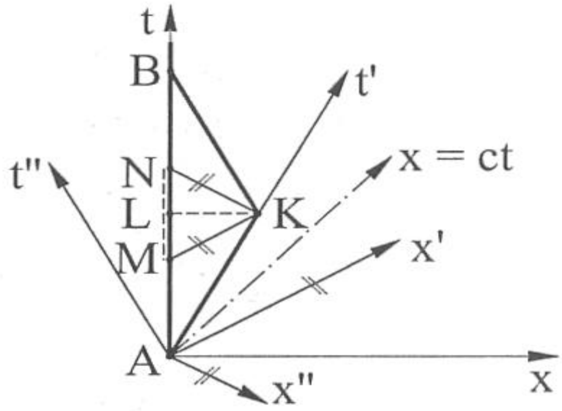


Obr. 10. Paradox dvojčat.

Dvojčata Petr a Pavel dostala při narození stejné hodinky H^* a H. Ve dvacátém roce svého věku Petr odletěl v raketě jako astronaut daleko do vesmíru. Svoje hodinky H^* vzal s sebou. Po cestě, která trvala podle jeho hodinek 40 let, se šedesátiletý vrátil na Zemi. Na dotaz po bratru Pavlovi se mu dostalo překvapivé odpovědi: „No, ten už byl moc starý a umřel. Bylo mu už přes stovku." Hodinky H, které zůstaly v bratrově pozůstalosti, opravdu ukazovaly více než sto let. Je to vůbec možné? Pohyb je přece relativní. Proč tedy nelze říci, že od Petrovy rakety uletěla Země a poté se opět vrátila, takže by naopak hodinky H měly ukazovat méně než hodinky H^*? Efekt dilatace času je reciproční, vzájemný.

Asymetrie je podmíněna tím, že soustava S, spjatá se Zemí, je inerciální, zatímco soustava S^*, spojená s raketou, po celou dobu inerciální zůstat nemůže [16]. Korektní řešení lze tedy podat prostředky obecné teorie relativity s uvážením vlivu gravitačního potenciálu na chod hodin. Asymetrii však lze, alespoň v zásadě, pochopit i v rámci speciální teorie relativity bez uvážení efektů zrychlení při startu, obratu a přistání. Nechť Petr při startu „nasedl" na raketu míjející právě Zemi rychlostí v do vesmíru a v nejvzdálenějším bodě cesty „přesedl" na jinou raketu, která jej právě míjela a letěla opačným směrem k Zemi rychlostí $-v$. Z ní pak při míjení Země „vystoupil". Tak je možno za použití tří (nikoli pouze dvou!) inerciálních soustav S, S' a S'' rozdílu v údajích obojích hodin porozumět. Při vzdalování se velkou rychlostí šly Petrovy hodinky H^* (pozorováno ze Země) v důsledku dilatace času (3) pomaleji. Při cestě nazpět šly rovněž pomaleji, a tak došlo k jejich celkovému opoždění vůči hodinkám H na Zemi. Nelze však uvažovat recipročně. Při „přesedání" změnil Petr svoji vztažnou soustavu S' za jinou S'', s jinou synchronizací vzdálených hodin, a tím Pavel na Zemi náramně zestárl. Transformace pro časový údaj (1) obsahuje i souřadnice polohy příslušné události!

Ilustrací je obr. 11. V něm jsou obvyklým způsobem zaneseny časové osy t, t' a t'' a osy x, x' a x'' tří inerciálních soustav S, S' a S''. V náčrtu jsou vyneseny světočáry Pavla na Zemi ALB a raketou cestujícího Petra AKB. S událostí K (Petrovo přesednutí, a tedy záměna inerciální vztažné soustavy S' za jinou) je na Zemi, v Pavlově vztažné soustavě S, současná událost L. Z hlediska vztažné soustavy S' je s událostí K současná událost M, avšak z hlediska soustavy S'' je s K současnou událostí událost N!



Obr. 11. Světočáry Petra a Pavla.

Efekt dilatace času mezi dvěma inerciálními vztažnými soustavami je vždy reciproční. Zde však vstupují do hry soustavy tři, a tím i „časový skok" mezi událostmi M a N, který je důsledkem odlišné synchronizace hodin v soustavách S' a S''.

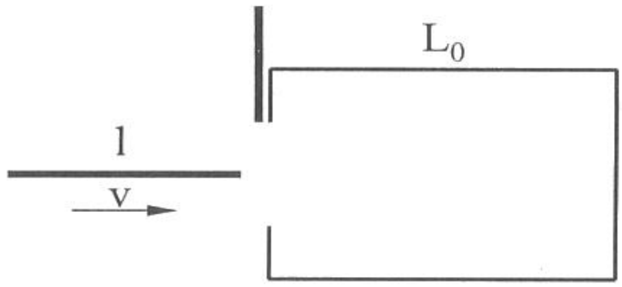
Samozřejmě je daleko lepší a realističtější uvažovat cestu se zrychlením při startu, při změně směru pohybu v nejvzdálenějším bodě a při brzdění k přistání. Výpočet není nijak obtížný. Lze bez obtíží vypočítat, za jakou dobu v raketě a na Zemi lze dosáhnout vytčeného vzdáleného cíle. Lze rozebrat i cestu podniknutou s plným komfortem (kupř. s relativním zrychlením $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ vůči raketě) při stále spuštěných motorech. Problém zde spočívá v ohromné a zcela nerealistické spotřebě paliva, nikoli v otázkách kinematických.

V příspěvku omezeného rozsahu nelze paradoxy probírat podrobněji. Je třeba vycházet z toho, že čtenář je obeznámen s teorií relativity a tento článek je jen připomenutím paradoxů, které už dříve někde potkal. Přesto snad poslední dva ne tak běžně známé paradoxy některé čtenáře trochu více upoutají.

8. Tyč v kůlně aneb auto v garáži

Provokativní modifikací paradoxu o vlaku a nádraží je paradox pohybující se tyče a kůlny. Také bychom mohli tento paradox nazvat: Dlouhé auto v krátké garáži.

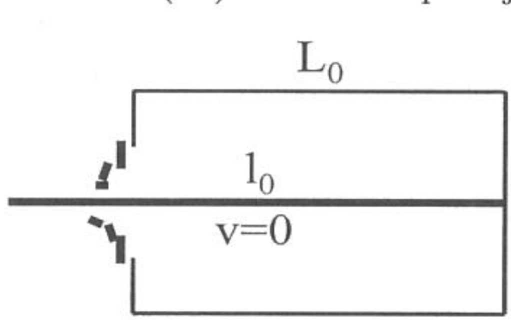
Sledujme obr. 12. Vodorovná tyč se pohybuje rychlostí v vpravo do vrat otevřené kůlny (stodoly). Nechť je klidová délka tyče l_0 větší než klidový rozměr kůlny L_0, $l_0 > L_0$. Pohybuje-li se tyč velkou rychlostí v, je vzhledem k soustavě kůlny zkrácena (třeba na polovinu) a může být celá v kůlně současně obsažena ($l < L_0$) navzdory tomu, že $l_0 > L_0$.



Obr. 12. Zkrácená pohybující se tyč vletí do kůlny.

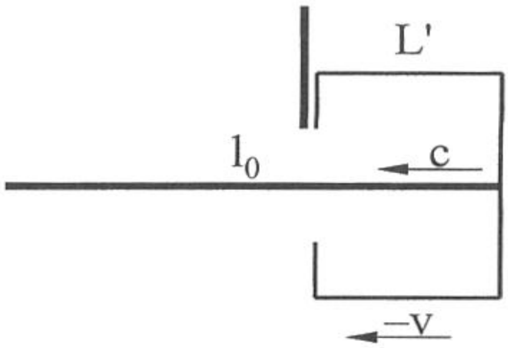
Nechť poté, co zadní konec tyče vstoupil do kůlny (událost M), se vrata kůlny zavřou v okamžiku t_M (obr. 13a). Poté však tyč narazí do protější stěny (událost N v obr. 13b). Platí $t_N > t_M$. Je-li stěna dostatečně pevná, tyč se zastaví. Po zastavení se však její klidová délka l_0 restituuje a tyč je v soustavě S (spjaté se stodolou) delší, než je rozměr stodoly. Tyč je buď ve stodole uvězněna v ohnutém a napjatém stavu, nebo vrata stodoly vyrazí (obr. 14). Z hlediska vztažné soustavy spjaté s pohybující se tyčí S' se příběh jeví jinak. Kůlna je zkrácena a v okamžiku nárazu (událost N) je zadní konec tyče ještě před vraty a vrata tedy nejsou uzavřena, $t'_N < t'_M$. Co s tím?

Obr. 13. Zavření dveří (M) a náraz na protější stěnu (N).



Obr. 14. Zastavená tyč se do stodoly nevejde.

Je až překvapivé, že tento provokující paradox nebývá vzpomínán v souvislosti s vlakem a nádražím. Zpravidla se konstatuje, že začátek vlaku již ze stanice vyjel,



Obr. 15. Pohled z hlediska soustavy S'.

když jeho konec do stanice teprve vstoupil. (Snad je to tím, že fyzikové jsou mírní lidé a nemilují havárie.)

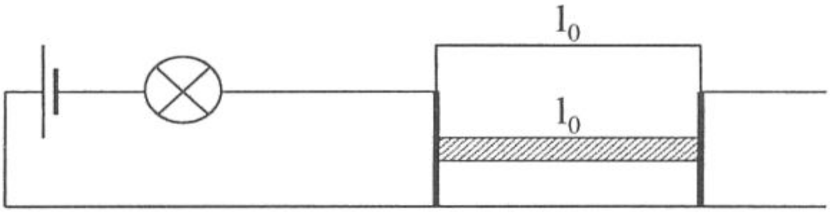
K vysvětlení paradoxu z pohledu soustavy S' je třeba uvážit, že o nárazu přední části tyče do zadní stěny (tj. o události N) zadní část tyče „ještě neví". Zpráva (pružný signál) se může tyčí přenášet nejvýše rychlostí c, a tak zadní část tyče stále ještě pokračuje v původním pohybu. Z hlediska soustavy S' to odpovídá tomu, že zadní (levá) část tyče stojí a přední část, která narazila, je tlačena zadní stěnou garáže zprava doleva (obr. 15). Signál, který se může podél tyče šířit nejvýše rychlostí c, dojde na levý konec tyče teprve poté, co je celá tyč již v kůlně a dveře se zavřely. Přesný výpočet prostoročasových vztahů není opět obtížné provést. Události M a N jsou v prostoročase odděleny prostorupodobným intervalem. Pozorovatel nárazu (události N) nemůže ovlivnit uzavření vstupních vrat (událost M), ale ani naopak, po uzavření vrat již není možné dát případný pokyn k uvolnění protější stěny kůlny, aby tyč mohla bez úhony proletět a pokračovat v pohybu.

Poučení vyplývající z uvedeného paradoxu může být dvojí: 1. Lorentzova transformace a z ní plynoucí Lorentzova kontrakce nejsou jen matematickým trikem. Kontrakce je spjata s určitými efekty typu napětí (jak ostatně dokládají i některé předchozí a mnohé další, zde neuvedené paradoxy). 2. Každý proces (v tomto případě uvěznění tyče v kůlně vedoucí k deformaci, nebo vyražení dveří zevnitř) může být stejně dobře vysvětlen a popsán, byť i s odlišnou argumentací (!), z každé inerciální vztažné soustavy.

Snad můžeme připojit i poučení třetí: Máte-li doma šestimetrovou garáž, avšak sedmimetrové velmi rychlé auto (což ale u čtenářů PMFA lze asi stěží předpokládat), můžete do této garáže s Vaším autem vjet (vjedete-li dostatečně rychle) a zastavit v ní, nelze to však doporučit. Nedopadne to dobře.

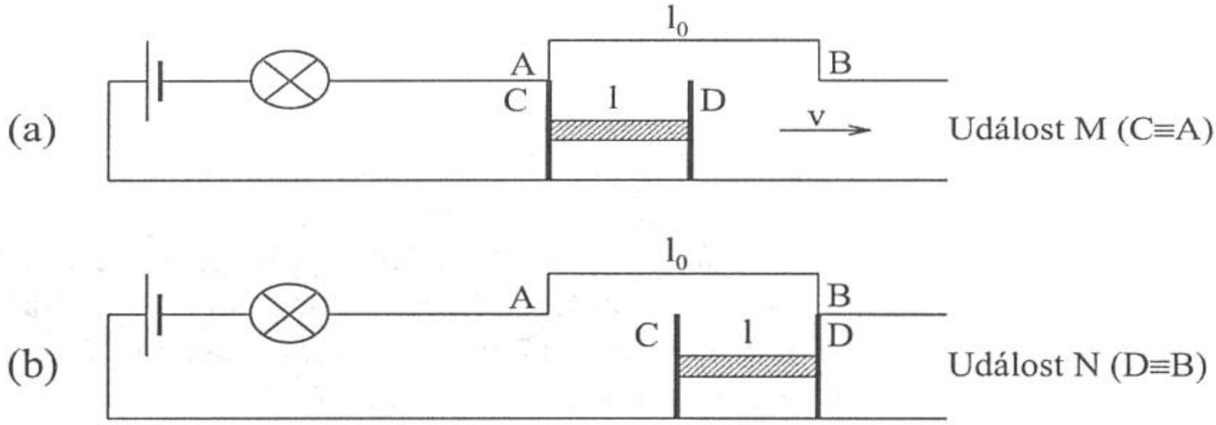
9. Paradox zhasnuté žárovky

Nakonec trochu podrobněji uveďme ještě jeden, nepříliš rozšířený, přesto však typický časoprostorový paradox, jehož řešení si může čtenář sám zkusit. Mějme zařízení podle obr. 16. Ke dvěma dlouhým rovnoběžným vodičům je připojen zdroj napětí a žárovka. V úseku délky l_0 je vzdálenost vodičů poněkud zvětšená. Podél vodičů se může posouvat jezdec ve tvaru H, jehož střední příčka je nevodivá.



Obr. 16. Uspořádání k paradoxu žárovky.

Klidová délka jezdce l_0 nechť je táž jako délka rozšířeného úseku. Pohybuje-li se jezdec vpravo rychlostí v, je jeho délka, pozorovaná ze vztažné soustavy S, spjaté s rovnoběžnými vodiči, zkrácena na $l = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$.

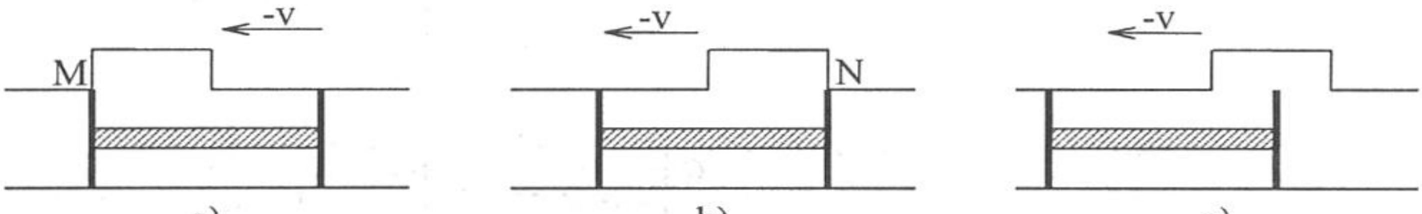


Obr. 17. Kontakt je po dobu $t_N - t_M$ přerušen.

Podle obr. 17a je v okamžiku t_M vodivé spojení v obvodu přerušeno, a teprve když jezdec přední částí dorazí na přední konec rozšířeného úseku (obr. 17b), je v události N spojení opět obnoveno. Jistě platí $t_M < t_N$. Na dobu

$$t_N - t_M = \frac{l_0 - l}{v} \tag{9}$$

je obvod přerušen a žárovka tedy jistě zhasne. Z hlediska vztažné soustavy S', spjaté s jezdcem, lze situaci popsat podle obr. 18. Jezdec stojí, pohybují se vodiče. Rozšířený úsek je zkrácen na $l' = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} < l_0$ a posouvá se zprava doleva.



Obr. 18. V soustavě S' je časové pořadí událostí M a N opačné. Obvod nikdy není přerušen.

(Tak je také třeba číst uvedený obrázek.) Událost N (obr. 18b), v níž se na konci jezdce uskuteční kontakt, předchází události M. (Vodivé spojení v obvodu bylo však i předtím trvale udržováno na levém konci jezdce, jak je patrno z obr. 18c.) Teprve o něco později následuje událost M (obr. 18a), v níž je ztracen kontakt v levé části, který je ale již od události N zajištěn v části pravé. Časové pořadí událostí M a N je vzhledem k S' opačné než v soustavě S. Platí $t'_M > t'_N$. Kontakt v obvodu nebyl vůbec nikdy úplně přerušen. Žárovka by tedy neměla zhasnout ani na okamžik. Zhasne, či nezhasne žárovka?

Trvá-li zhasnutí žárovky v soustavě S po dobu T, můžeme tento interval zhasnutí chápat jako interval mezi dvěma tiky hodin v této soustavě (v níž žárovka i zdroj jsou v klidu). Z hlediska vztažné soustavy S', vůči níž se celé uspořádání (včetně žárovky a zdroje) pohybuje, by se tedy interval zhasnutí T' vzhledem k dilataci času (3) měl jevit ještě delší,

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{10}$$

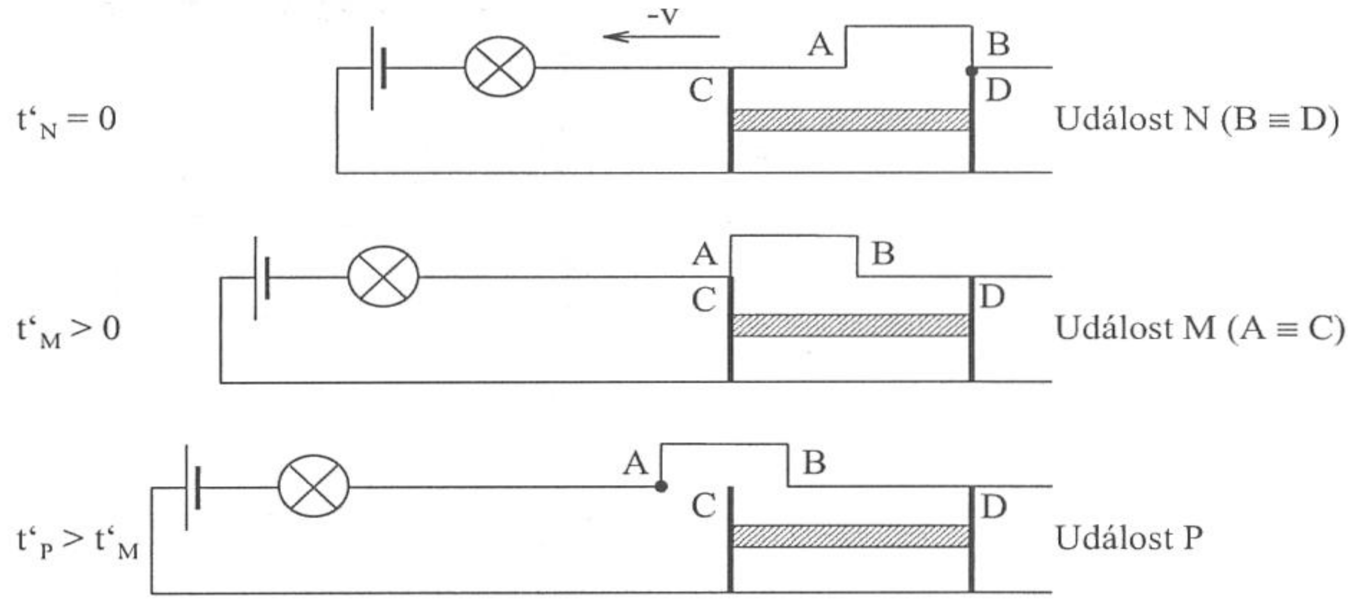
Jak to vlastně je? Zhasne žárovka a trvá toto zhasnutí vzhledem k S' opravdu déle? Odpověď zní: Ano a vztah (10) lze, s uvážením konečné rychlosti signálu podél vedení a relativistického skládání rychlostí, přímým výpočtem potvrdit.

Zabývat se úlohou detailně, s uvážením magnetického pole proudu, indukované elektromotorické síly apod., by bylo jistě obtížné. Není to však zapotřebí. Načrtněme postup zjednodušeného výpočtu. Podle obr. 17 není interval zhasnutí T z hlediska soustavy S dán jen dobou přerušeného kontaktu v místě A (událost M) a jeho obnovením v místě B (událost N), ale také časem nezbytným k příchodu „zprávy" o novém spojení (tj. časem potřebným k příchodu „napěťového skoku") z místa B do místa A. Příchod signálu označme jako událost P. Můžeme pak psát

$$T = t_P - t_M = \frac{l_0 - l}{v} + \frac{l_0}{v_s} , \tag{11}$$

kde v_s je rychlost signálu podél vedení.

Z pohledu soustavy S', spjaté s jezdcem, jsou časové poměry jiné. Kontakt v obvodu není sice nikdy přerušen, ke zhasnutí žárovky však přesto dojde. Sledujme obr. 19.



Obr. 19. V události P dorazila zpráva o události N do bodu A.

Volíme-li odečítání času od události N ($t'_N = 0$), pak pro časovou souřadnici události M máme

$$t'_M = \frac{l_0 - l'}{v} \tag{12}$$

a pro čas t'_P, kdy zpráva o události N dorazí do bodu A, platí

$$t'_P v'_s = l' + v t'_P, \tag{13}$$

kde v'_s je rychlost signálu podél vedení, avšak posuzovaná vzhledem k soustavě S'.

Interval zhasnutí S'

$$T' = t'_P - t'_M \tag{14}$$

je časovým intervalem mezi událostí M (přerušením obvodu v místě A v čase t'_M) a příchodem zprávy do místa A (v čase t'_P) o uskutečněném vodivém spojení na jiném místě (tj. zprávy o události N). Zdůrazněme však, že toto spojení bylo realizováno jinde, totiž v místě B. Místo A je pevně vymezeno vůči celému obvodu se zdrojem a žárovkou, v němž vlastně dochází k „tiku žárovkových hodin“. Tato zpráva o „navázání kontaktu“ (tj. napěťový skok) přijde příliš pozdě a žárovka na dobu T' zhasne.

Přímým výpočtem lze potvrdit očekávanou dilataci (10). Ze (14) (13) a (12) a s uvážením $l' = l = l_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ máme

$$T' = \frac{l}{v'_s - v} - \frac{l_0 - l}{v} = \frac{l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{v'_s - v} - \frac{l_0}{v} + \frac{l}{v} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{1}{v'_s - v} + \frac{1}{v}\right) - \frac{l_0}{v}. \tag{15}$$

Za v'_s, tj. rychlost signálu vůči S', dosadíme do (15) ze známého vzorce pro relativistické skládání rychlostí (který je přímým důsledkem Lorentzovy transformace (1))

$$v'_s = \frac{v_s + v}{1 + \dfrac{v_s v}{c^2}}\,.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} T' &= l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{c^2 + v_s v}{c^2 v_s - v_s v^2} + \frac{1}{v}\right) - \frac{l_0}{v} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{(v+v_s)c^2}{v v_s(c^2 - v^2)} - \frac{l_0}{v} = \\ &= \frac{l_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{v_s} + \frac{1}{v}\right) - \frac{l_0}{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left[l_0\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_s}\right) - \frac{l}{v}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{l_0 - l}{v} + \frac{l_0}{v_s}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,T, \end{aligned}$$

což podle (11) odpovídá dilatačnímu vztahu (10), jak jsme očekávali.

10. Závěrem

Teorie relativity nám nabízí četné paradoxní situace, které udivují, již od r. 1905. K udělení Nobelovy ceny sekretář Švédské královské akademie Einsteinovi 10. 11. 1921 napsal:

„*Jak jsem Vám již telegraficky sdělil, královská akademie věd přijala na svém včerejším zasedání rozhodnutí udělit Vám Nobelovu cenu za rok 1921 uvažujíc Vaše práce z teoretické fyziky, speciálně objev zákona fotoelektrického jevu, neuvažujíc přitom Vaše práce z teorie relativity i teorie gravitace, které budou oceněny po jejich potvrzení v budoucnu.*" [17]

Lze tomu rozumět snad i tak, že tenkrát stále ještě přežívala naděje, že relativistickým podivnostem bude přece jen možné uniknout a experimentální výsledky, nalezené kupř. při hledání pohybu Země vůči éteru, z nichž Einsteinova teorie vyrůstala, nejsou jejím potvrzením a bude je snad možno vyložit i jinak, méně revolučně. Nestalo se tak. Teorií relativity formulované nerozlučné sepětí prostoru a času prostoupilo celou fyziku 20. století.

Literatura

[1] Skokan, J.: *Nové názory o prostoru, času a gravitaci.* Česká ročenka, Plzeň 1926.
[2] Bolstein, A.: *Obyčejné selhání jedné neobyčejné teorie.* RO Consulting, Praha 1999.
[3] Vlček, Ľ.: *Nové trendy vo fyzike.* Slovak Academic Press, Banská Bystrica 1996.
[4] Taylor, E. F., Wheeler, J. A.: *Spacetime Physics.* W. H. Freeman, San Francisco 1966. (Tejlor, E., Uiler, Dž.: *Fizika prostranstva — vremeni.* Mir, Moskva 1971.)
[5] Votruba, V.: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha 1969.
[6] Kuchař, K.: *Základy obecné teorie relativity.* Academia, Praha 1968.
[7] Moller, C.: *The Theory of Relativity.* Clarendon Press, Oxford 1972.
[8] Rosser, W.: *An Introduction to the Theory of Relativity.* Butterworths, London 1964.
[9] Rindler, W.: *Introduction to Special Relativity.* Clarendon Press, Oxford 1982.
[10] Horský, J.: *Úvod do teorie relativity.* SNTL, Praha 1975.
[11] Bartuška, K.: *Fyzika pro gymnázia — Speciální teorie relativity.* Prometheus, Praha 1993.
[12] Penrose, R.: Proc. Cambr. Phil. Soc. *55* (1959), 137.
[13] Terrell, T.: Phys. Rev. *116* (1959), 1041.
[14] Gamow, G.: *Pan Tompkins v říši divů.* Mladá fronta, Praha 1986.
[15] Bičák, J.: Čes. čas. fyz. *A24* (1974), 519, a Čes. čas. fyz. *A25* (1975), 200.
[16] Langer, J.: Vesmír *78* (1999), 490.
[17] Horský, J.: *Albert Einstein, génius lidstva.* Prometheus, Praha 1998.